第21章

電荷

21.2 電荷

同性電荷相斥，異性電荷相吸。

圖 21-1　靜電吸附，一種在乾燥天氣的電的現象，導致紙片之間會吸附並吸附在塑膠梳子上，而衣物會吸附於身上。(資料照片)

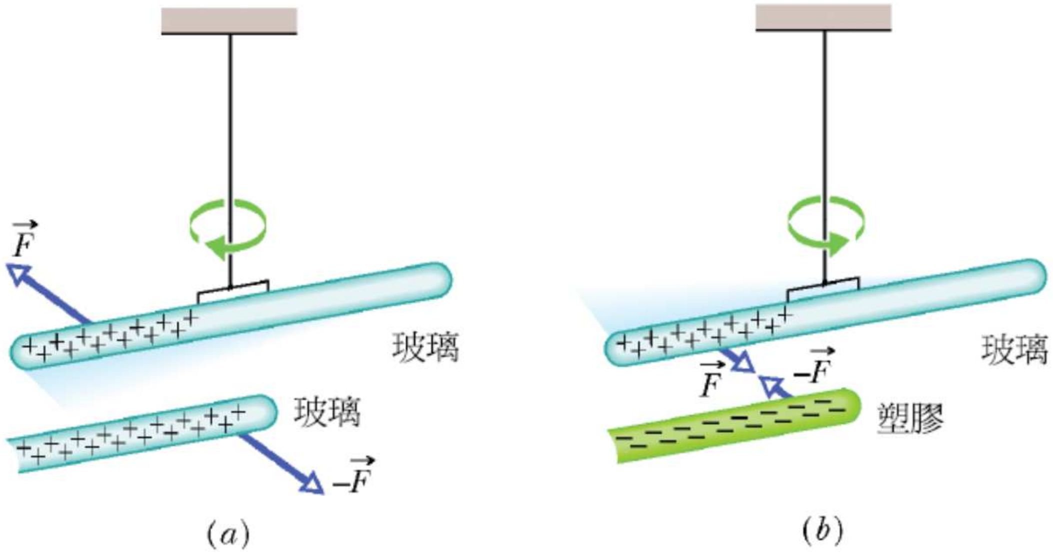


圖 21-2　(a)兩個帶同性電荷而互斥的棒子；(b)兩個帶異性電荷而互相吸引的棒子。加號代表正的淨電荷；減號代表負的淨電荷。

21.3 導體與絕緣體

導體(conductor)是電荷在其內可以相當自由地移動的物質；其實例包括金屬(例如在常見連接到電燈之電線中的銅)、人體，以及自來水。

非導體(nonconductor)——也稱為絕緣體(insulator)——是電荷在其內不能自由移動的物質；其實例包括橡膠(例如在常見之電線外的絕緣體)，塑膠、玻璃和化學純水。

半導體(semiconductor)是導電性介於導體和絕緣體之間的物質；其實例包括在電腦晶片中的矽和鍺。

超導體(superconductor)是一種完美導體的物質，它可以允許電荷不受任何阻礙的移動。

原子的結構與電性決定了導體與絕緣體的特性。

原子由帶正電的**質子**、帶負電的**電子**與電中性的**中子**所組成。質子與中子彼此緊密的被束縛在中央的原子核裡。

當如銅之類的導體原子聚集起來形成固體的時候，它們最外圍的一些電子(也因此束縛最鬆散)變成可以在固體中自由游移，因而使得原子成為正電性(正離子)。我們將這種可移動的電子稱為傳導電子(conductionelectron)。

非導體中則存在著相當少的(如果有的話)自由電子。

21.3 導體與絕緣體

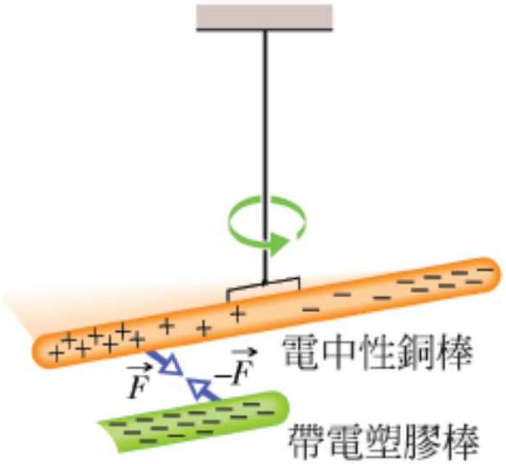


圖 21-4 用非導電性細線將電中性銅棒懸吊起來，使銅棒與環境隔離開來。銅棒之任何一端都會受帶電塑膠棒所吸引。此時，銅棒上的傳導電子受塑膠棒上負電荷推斥，而移向棒上較遠的一端。然後塑膠棒的負電荷會吸引銅棒上近塑膠棒一端的正電荷，造成銅棒產生旋轉，因而使銅棒近端更靠近塑膠棒。

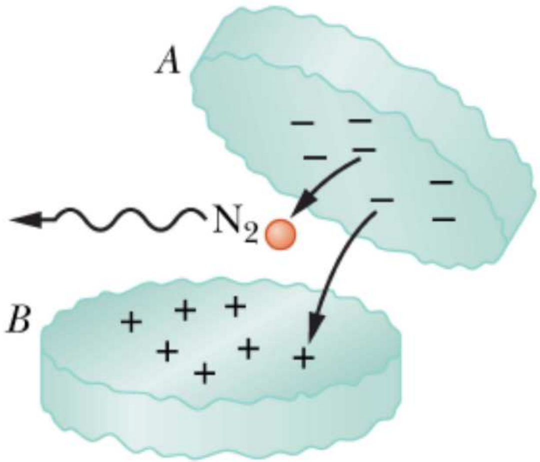


圖 21-5 當「冬青救命丹」糖果分離成兩碎片時。從 A 碎片負電性表面跳躍到碎片正電性表面的電子，與在空氣中的氮(N2)分子互相碰撞。

冬青救命丹糖果

(Triboluminesence 摩擦發光)

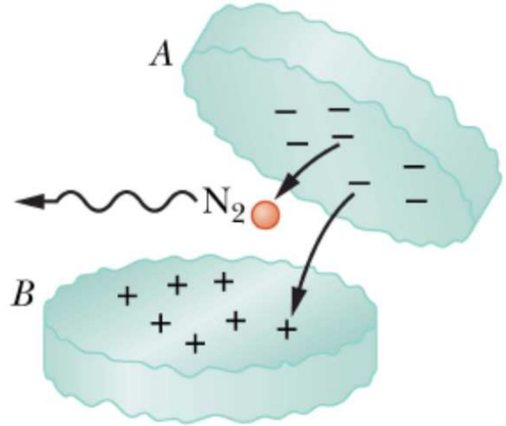


圖 21-5 當「冬青救命丹」糖果分離成兩碎片時。從 A 碎片負電性表面跳躍到碎片正電性表面的電子，與在空氣中的氮(N2)分子互相碰撞。

21.4 庫侖定律

物體的帶電會導致吸引力或排斥力的發生，這個力量被稱為**靜電力**(electrostatic force)。

帶電粒子的作用力方程式稱為**庫侖定律**(Coulomb's law)

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathrm{r}} \qquad \text{(Coulomb's law)},$$

粒子1有電荷q_1，粒子2有電荷q_2，F為粒子1的受力。在這個公式中，$\hat{\mathrm{r}}$ 代表兩粒子延伸軸上的單位向量，r則是兩粒子間的距離，而k 是一個常數。

電荷的SI單位為**庫侖**。

且 $$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}.$$

ε_0稱為**介電常數**。

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}.$$

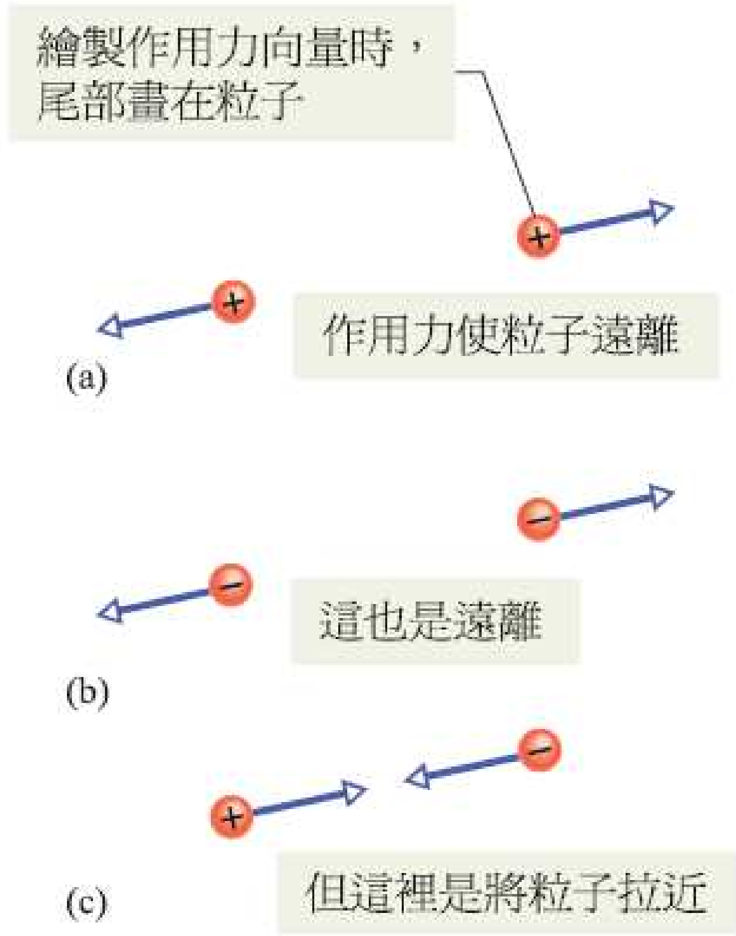


圖 21-6 兩個帶電粒子互相排斥若他們帶有相同電性，即(a)皆為正，或(b)皆為負。(c)如果兩者電荷電性符號相反，則彼此互相吸引。

21.4 庫侖定律

電流等於電荷移動通過一點或一個區域的速率dq/dt

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(electric current)},$$

i 為電流 (安培) 而 dq (庫侖) 為dt(秒)內通過之電荷量。因此，

$$1\ \mathrm{C} = (1\ \mathrm{A})(1\ \mathrm{s}).$$

21.4 庫侖定律

如果我們有n 個帶電粒子，則它們會兩兩各自成對相互作用。其中任何一個粒子所受的力可以寫成下列向量和，而且讓我們以粒子1 為例，

$$\vec{F}_{1,\mathrm{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n}$$

$\mathbf{F}_{1,4}$為粒子4對粒子1造成之力，依此類推。

在研究重力時很有用的殼層(shell theorem)定理，也可類似地應用於靜電力：

均勻電荷分佈之殼層對其外部的帶電粒子的吸力或斥力，就好像將球殼上的電荷集中於球心時產生的作用一樣。

均勻電荷分佈之殼層對位於其內部之帶電粒子無淨的靜電力作用。

範例 21.1　由兩個粒子作用的淨力

(a)圖 21-8a 中兩個正電粒子固定在軸上。該電量分別為 $q_1 = 1.60 \times 10^{-19}$ C 和 $q_2 = 3.20 \times 10^{-19}$ C，且間距為 $R = 0.0200$ m。從粒子 1 作用於粒子 2 的靜電力 $\vec{F}_{12}$ 大小與方向為何？

關鍵概念

因爲兩個粒子皆帶正電，所以粒子 1 會受到粒子 2 的排斥力，其大小可由 21-4 式求出。因此，粒子 1 所受的斥力 $\vec{F}_{12}$ 方向爲遠離粒子 2，也就是負軸的方向，如圖 21-8b 中的自由體圖所示。

兩粒子　將 21-4 式中的 R 以 r 來代替，所以 F_{12} 的大小可寫爲

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$
$$= (8.99\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2C^2})$$
$$\times\frac{(1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C})(3.20\times10^{-19}\ \mathrm{C})}{(0.0200\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 1.15\times10^{-24}\ \mathrm{N}$$

因此，力 $\vec{F}_{12}$ 的大小與方向(相對於正 x 軸的方向)爲

1.15×10^{-24} N　及　180°　(答)

我們亦可以用單位向量標記法來表示 $\vec{F}_{12}$ 如下

$\vec{F}_{12} = -(1.15\times10^{-24}\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$　(答)

(b)圖 21-8c 與圖 21-8a 相同，但多了一個粒子 3 位於粒子 1 與 2 之間的 x 軸上。粒子 3 的帶電量為 -3.20×10^{-19} C 且與粒子 1 的距離為 3/4。則粒子 1 受到來自於粒子 2 與粒子 3 的淨靜電力 $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ 為何？

關鍵概念

粒子 3 的出現並未改變粒子 2 對粒子 1 的靜電作用力。因此，力 $\vec{F}_{12}$ 仍然作用於：粒子 1 同理，粒子 3 對粒子 1 的作用力 $\vec{F}_{13}$ 也未受到粒子 2 的存在所影響。因爲粒子 1 與粒子 3 所帶的電荷異號，所以粒子 1 會被粒子 3 所吸引。所以力 $\vec{F}_{13}$ 指向粒子 3，如圖 21-8d 中的自由體圖所示。

三粒子　我們可如下改寫 21-4 式來得到 $\vec{F}_{13}$ 的大小

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_3|}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2}$$
$$= (8.99\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2C^2})$$
$$\times\frac{(1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C})(3.20\times10^{-19}\ \mathrm{C})}{\left(\frac{3}{4}\right)^2(0.0200\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 2.05\times10^{-24}\ \mathrm{N}$$

我們亦可以用單位向量標記法來表示 $\vec{F}_{13}$

$$\vec{F}_{13} = (2.05\times10^{-24}\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$$

粒子 1 上的合力 $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ 爲 $\vec{F}_{12}$ 及 $\vec{F}_{13}$ 的向量和；即利用 21-7 式，我們可將作用於粒子 1 的淨力 $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ 以單位向量表示法表示爲

$$\vec{F}_{1,\mathrm{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$
$$= -(1.15\times10^{-24}\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} + (2.05\times10^{-24}\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} \quad \text{(答)}$$
$$= (9.00\times10^{25}\ \mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$$

因此 $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$ 的大小及方向(相對於正 x 軸的方向)爲

9.00×10^{25} N　及　0°　(答)

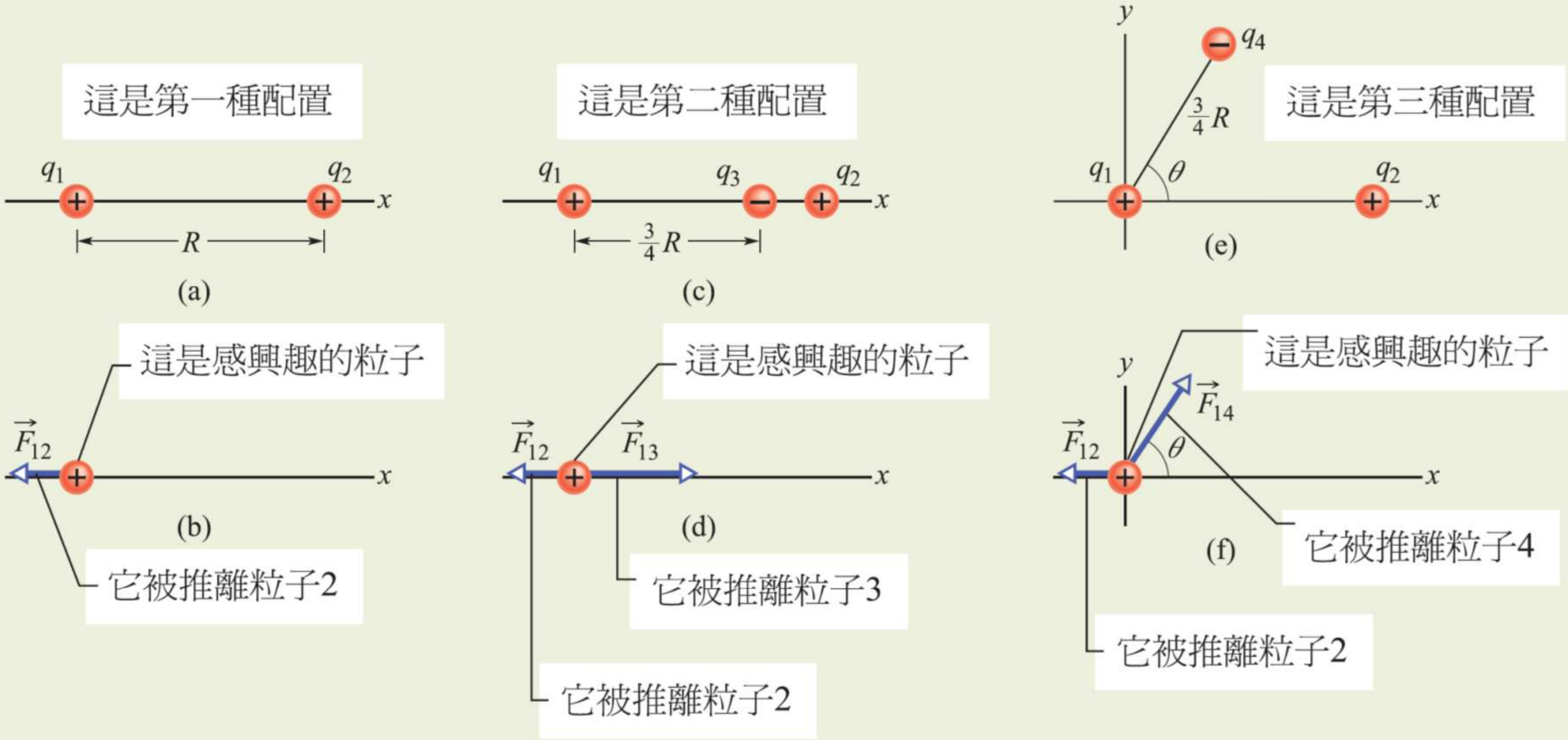


圖 21-8 (a)兩帶電量分別為 q_1 及 q_2 的粒子固定在 x 軸上。(b)粒子 1 的自由體圖顯示出其靜電力來自於粒子 2。(c)包含粒子 3。(d)粒子 1 的自由體圖。(e)包含粒子 4。(f)粒子 1 的自由體圖。

(c)除了加進粒子 4 外，圖 21-8e 與圖 21-8a 皆相同。粒子 4 的電量為 $q_4 = 3.20 \times 10^{-19}$ C，且位於一條與 x 軸成 $\theta = 60°$的直線上，與粒子 1 相距 $\frac{3}{4}R$。則粒子 1 受到來自於粒子 2 與粒子 4 的淨靜電力 $\vec{F}_{1,\text{net}}$ 為何？

關鍵概念

淨力 $\vec{F}_{1,\text{net}}$ 爲 $\vec{F}_{12}$ 與 $\vec{F}_{14}$ (粒子 4 對粒子 1 的作用力)的向量和。因爲粒子 1 與粒子 4 所帶的電荷異號，所以粒子 1 會被粒子 4 所吸引。因此粒子 1 的受力 $\vec{F}_{14}$ 爲指向粒子 4 的方向，並與 x 軸夾 60 度角，如圖 21-8f 中的自由體圖所示。

四粒子　我們可以將 21-4 式重寫爲下式，來獲得的大小

$$
\begin{aligned}
F_{14} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_4|}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2} \\
&= (8.99\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2\text{C}^2) \\
&\quad \times \frac{(1.60\times10^{-19}\ \text{C})(3.20\times10^{-19}\ \text{C})}{\left(\frac{3}{4}\right)^2(0.0200\ \text{m})^2} \\
&= 2.05\times10^{-24}\ \text{N}
\end{aligned}
$$

然後由 21-7 式，我們可以寫出粒子 1 的受力 $\vec{F}_{1,\text{net}}$ 爲

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}$$

因爲力 $\vec{F}_{12}$ 與 $\vec{F}_{14}$ 並不在同一軸上，我們便不能簡單地只是將其大小相加而達成向量和。我們須以下列之其中一種方法來完成向量相加。

方法一　直接在能做向量運算的計算機上相加。

對 $\vec{F}_{12}$ 而言，大小爲 1.15×10^{-24}，角度爲 180 度。對 $\vec{F}_{14}$ 而言，大小爲 2.05×10^{-24}，角度爲 60 度。然後將這兩個向量相加即可。

方法二　以單位向量表示法來相加。

我們將 $\vec{F}_{14}$ 重新表示如下

$$\vec{F}_{14} = (\vec{F}_{14}\cos\theta)\hat{\text{i}} + (\vec{F}_{14}\sin\theta)\hat{\text{j}}$$

把 2.05×10^{-24} N 代入 F_{14} 及 60 度代入 θ，可得：

$$\vec{F}_{14} = (1.025\times10^{-24}\ \text{N})\hat{\text{i}} + (1.775\times10^{-24}\ \text{N})\hat{\text{j}}$$

所以我們可求得粒子 1 上的合力爲

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{1,\text{net}} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} \\
&= -(1.15\times10^{-24}\ \text{N})\hat{\text{i}} \\
&\quad + (1.025\times10^{-24}\ \text{N})\hat{\text{i}} + (1.775\times10^{-24}\ \text{N})\hat{\text{j}} \\
&\approx (-1.25\times10^{-25}\ \text{N})\hat{\text{i}} + (1.78\times10^{-24}\ \text{N})\hat{\text{j}}
\end{aligned}
\qquad \text{(答)}
$$

方法三 分別將每個軸上的分量相加。

x 軸的分量和為

$$F_{1,\text{net},x}=F_{12,x}+F_{14,x}=F_{12}+F_{14}\cos 60°$$
$$=-1.15\times10^{-24}\text{ N}+(2.05\times10^{-24}\text{ N})(\cos 60°)$$
$$=-1.15\times10^{-25}\text{ N}$$

y 軸的分量和為

$$F_{1,\text{net},y}=F_{12,y}+F_{14,y}=0+F_{14}\sin 60°$$
$$=(2.05\times10^{-24}\text{ N})(\sin 60°)$$
$$=1.78\times10^{-24}\text{ N}$$

則合力 $\vec{F}_{1,\text{net}}$ 的大小為

$$F_{1,\text{net}}=\sqrt{F_{1,\text{net},x}^2+F_{1,\text{net},y}^2}=1.78\times10^{-24}\text{ N} \qquad \text{(答)}$$

方向為

$$\theta=\tan^{-1}\frac{F_{1,\text{net},y}}{F_{1,\text{net},x}}=-86.0°$$

然而，這個結果並不合理，因為 $\vec{F}_{1,\text{net}}$ 的方向必介於 $\vec{F}_{12}$ 與 $\vec{F}_{14}$ 之間。為修正此問題，我們將 θ 加上 180 度，得到：

$$-86.0°+180°=94.0° \qquad \text{(答)}$$

範例 21.2 作用於粒子上的兩力平衡

圖 21-9a 中有兩個固定在空間中的粒子：一帶電量 $q_1 = +8q$ 粒子位於原點處而另一電子帶電量 $q_2 = -2q$ 為位於 $x = L$。試問，若我們欲放入一個質子，(除了無窮遠以外)該放置於何處使其達到平衡(淨力為零)？此處之平衡穩定與否？(也就是說，當此質子放置之後，是否會被推向平衡點，抑或被推向遠方？)

關鍵概念

若 $\vec{F}_1$ 爲電荷 q_1 對質子的施力，$\vec{F}_2$ 爲電荷 q_2 對質子的施力，則我們要尋找的點爲 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ 的位置。因此，

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{21-8}$$

上式告訴我們在該點上，質子受到其餘兩個粒子的靜電力具有相同大小。

$$F_1 = F_2 \tag{21-9}$$

且兩個力量方向相反。

推論 因爲質子具有正電荷，所以質子與帶電量爲 q_1 的粒子具有相同電性，並且作用於質子的力 $\vec{F}_1$ 其方向必定指離 q_1。另外，質子和電荷爲 q_2 的粒子具有相反的電性，所以作用在質子的力 $\vec{F}_2$，其方向必然指向 q_2。只有當質子被放在 x 軸上時，「指離 q_1」與「指向 q_2」才會互爲相反方向。

如果質子位於 x 軸上 q_1、q_2 之間任一位置，例如圖 21-9b 中的 P 點，則 $\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 的方向將爲同向而非反向，與我們的要求相左。最後，如果質子位於 x 軸上 q_1 的右側，如圖 21-9c 中的點 S，則 $\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 亦爲反向。然而，21-4 式告訴我們，在該處 $\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 的大小將不可能相同：F_1 必大於 F_2，因爲 F_1 是由質子與一個較爲靠近(r 較小)且較大電荷($8q$ 相較於 $2q$)之間的交互作用而來。

最後，如果質子位於 x 軸上 q_2 的右側，如圖 21-9d 中的點，則 $\vec{F}_1$ 與 $\vec{F}_2$ 亦爲反向。然而，現在質子與較大電荷 q_1 的距離比電荷 q_2 遠，因此就會存在一個使得 F_1 與 F_2 相等的位置。令 x 爲這個位置的座標，q_P 爲質子的電量。

計算 利用 21-4 式，我們可將 21-9 式(這個式子的意義是兩個力具有相同的大小)重新表示如下

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8qq_p}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq_p}{(x-L)^2} \tag{21-10}$$

(請注意，上式 21-10 中只出現電荷的大小而無符號。我們在畫圖 21-9d 的時候已經決定力的方向，並且不想包含任何正或負號。)

經整理式 21-10 後，可得

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2=\frac{1}{4}$$

兩邊同取平方根，得

$$\frac{x-L}{x}=\frac{1}{2}$$

由此得到

$$x=2L \qquad \text{(答)}$$

在 $x=2L$ 的平衡並不穩定；因爲質子如果從 R 點向左移動，則 F_1 與 F_2 會同時增加，但因 q_2 較 q_1 靠近質子，所以 F_2 增加較多，因此新的合力將使質子更往左邊移動。如果質子向右偏移，F_1 與 F_2 皆會減小，但 F_2 減少的程度較大，因此新的合力將使質子更向右邊移動。但是在穩定平衡狀態下，每次當質子做了少許的位移後，它都會回到原來的平衡位置。

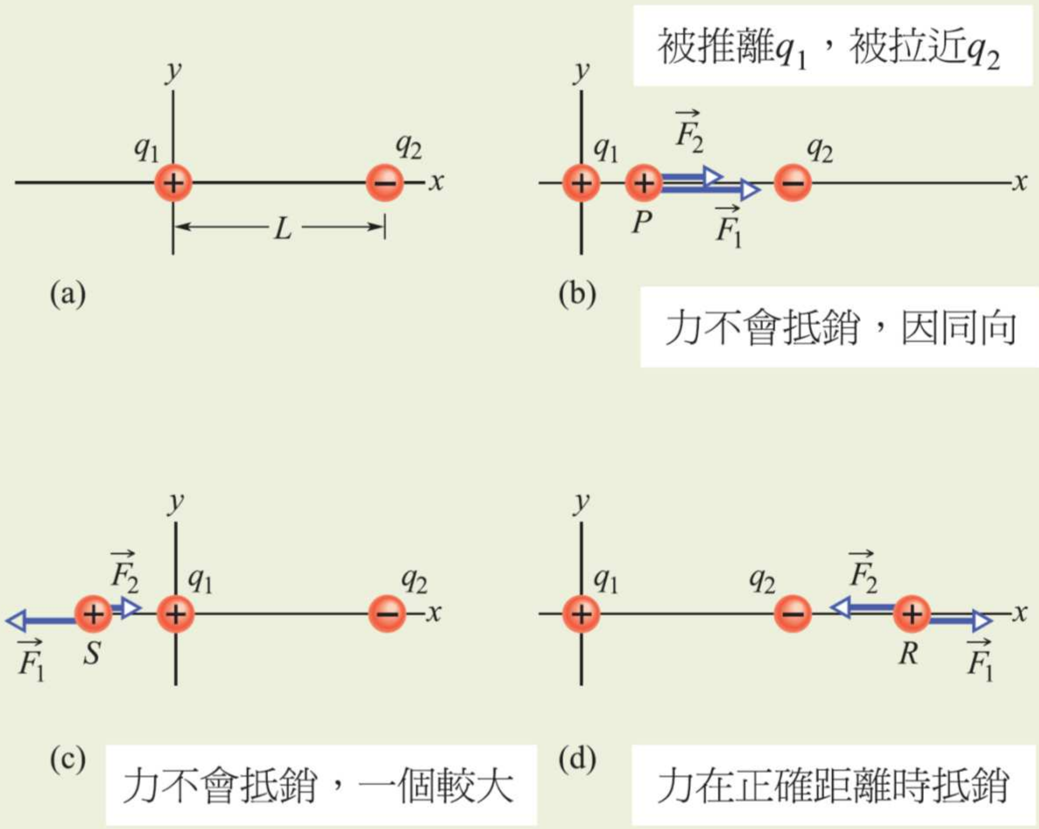


圖 21-9　(a)兩帶電粒子 q_1、q_2 被固定在 x 軸上，距離為 L。(b)至(d)圖中的 P、S、R 為質子的三個可能位置。在各個位置，$\vec{F}_1$ 為粒子 1 作用於質子的力，$\vec{F}_2$ 為粒子 2 作用於質子的力。

範例 21.3　兩個相同導體球之間電荷

圖 21-10a 中有兩個完全相同但是彼此電性絕緣的導體球 A、B，其距離(球心到球心)為 a，此值大於球的尺寸。球 A 帶有正電量$+Q$，球 B 為電中性。起初，兩球間並沒有靜電力的作用存在(假設它們的距離夠大，使得球上並沒有感應電荷產生)。

(a)假設兩球以導線連接一段時間。且此導線夠細，以至於可以忽略其上的淨電荷。試問當導線移走後，兩球間的靜電力為何？

關鍵概念

(1)因為球體是相同的，所以在導線將其連接後它們應該會具有相同的電荷(相同的符號與相同的量)。(2)最初的電荷總量(包括電荷的符號)必須等於最後的電荷總量。

推論　當兩導體球以導線連接時，球上彼此相斥的傳導電子(負電)，便可沿著導線流向具有正電荷(吸引電子)的球 A 上(見圖 21-10b)。當球失去負電荷，它便開始帶正電，此時球 A 獲得負電荷，所以其正電量將減少。當在球 B 上的過量電荷增加到$+Q/2$，而且在球 A 上的過量電荷減少到$+Q/2$ 的時候，電荷轉移將會停止，這種情況是發生在當有$-Q/2$ 的電荷經由金屬線，從球 B 流到球 A 的時候。

當導線移除後(圖 21-10c)，因球的尺寸相對小於它們分開的距離，我們便可假設兩球上的電荷並不會對彼此的均勻電荷分佈造成影響。所以我們可將第一殼層定理應用到每一個球上。

將 $q_1 = q_2 = Q/2$、$r = a$ 代入 21-4 式，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}\right)^2 \qquad \text{(答)}$$

此時兩球皆帶正電，彼此相斥。

(b)接下來，假設球 A 短暫接地，並馬上移除接地線路。此時兩球間的靜電力為何？

推論　當我們提供帶電物體一個導電路徑到大地(為一個巨大的導體)時，我們將會把此物體中性化。假如球 A 一開始帶負電，球上的過量電子將因為彼此的排斥力而移動到大地上。然而，因為球 A 一開始是帶正電，所以$-Q/2$ 的總電荷將由大地流到球體(圖 21-10d)上，導致球體上的電荷變成 0(圖 21-10e)。此時，兩球之間將(再一次)沒有靜電力的存在。

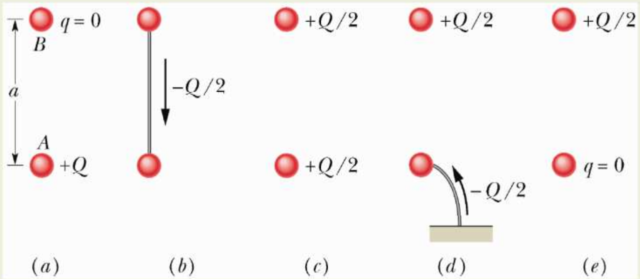


圖 21-10　兩導體小球 A 和 B。(a)一開始，球 A 帶正電。(b)負電荷透過連接的導線從 B 轉移至 A。(c)兩球皆帶正電。(d)負電荷經由接地線流向球 A。(e)球 A 成中性。

21.5 電荷的量子化

在班傑明-富蘭克林的時代，電荷被想像成是連續的流體——對許多用途來說，這是一個很有用的觀念。然而，如今我們明白諸如空氣、水之類的流體並不是連續的，而是由不連續的原子和分子所組成。實驗證明，「電流」乃由許多某種基本電荷所構成的不連續體。任何可測得的正電或負電荷q，都可以表示為

$$q = ne, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

基本電荷e 為許多重要自然常數中的一個。電子與質子的電量大小皆為e

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}.$$

21.5 電荷的量子化

表 21-1

三個粒子的電荷

粒子	符號	電荷
電子	e 或 e^-	-e
質子	p	+e
中子	n	0

當像電荷這樣的物理量，僅允許有不連續的數值，而不是任何數值都可以的時候，我們稱此物理量是量子化(quantized)的。例如，我們可能發現一粒子會不帶電量或帶有+10e 或–6e 的電量，但不會發現它帶3.57的電量。

我們經常可以看到諸如

「一個球上的電荷」、
「轉移的電荷量」及
「電子的帶電量」

等慣用語，這些皆表示電荷為一種物質。(事實上，這些敘述已經在本章節中出現過。)然而，我們應該記住的是：粒子是一種物質，而電荷是它們的特性之一，就如同質量一樣。

範例 21.4　原子核的靜電斥力

鐵原子原子核之半徑約為 4.0×10^{-15} 公尺，含有 26 個質子。

(a)相距 4.0×10^{-15} 公尺的兩個質子間的靜電斥力大小若干？

關鍵概念

質子可視同帶電粒子，所以彼此間的靜電力可由庫侖定律得出。

計算　由表 21-1 可知，質子的電荷是$+e$。因此從 21-4 式得到

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$=\frac{(8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(4.0\times10^{-15}\ \mathrm{m})^2} \qquad \text{(答)}$$

$$=14\ \mathrm{N}$$

不爆炸　對像甜瓜般大小的物體而言，此力並不大，但對一個質子而言，此力極爲巨大。除了氫(原子核中只有一個質子)以外，這樣巨大的力量應該會打散任何元素的原子核。但是它沒有如此，即使是擁有眾多質子的原子核也是一樣。因此必然存在某種巨大吸引力，以對抗此巨大的互斥靜電力。

(b)這兩個質子間的重力大小為何

關鍵概念

由於質子是粒子，所以彼此間的重力大小可由牛頓重力方程式(21-2 式)得出。

計算　令 m_p $(=1.67\times10^{-27}\ \mathrm{kg})$代表質子的質量，由 21-2 式可得

$$
\begin{aligned}
F &= G\frac{m_{\mathrm{p}}^2}{r^2} \\
&= \frac{(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})(1.67\times10^{-27}\ \mathrm{kg})^2}{(4.0\times10^{-15}\ \mathrm{m})^2} \quad \text{(答)} \\
&= 1.2\times10^{-35}\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

強與弱的力 此結果告訴我們，(相吸的)重力太弱了，不足以抵抗原子核中，質子間互斥的靜電力。實際狀況是一種稱爲強核力(strong nuclear force)的巨大力量將質子束縛在一起；此力在質子(及中子)靠在一起時，如在原子核中，才會產生作用。

雖然重力比靜電力弱了許多倍，但因爲它永遠相吸，所以在大尺度的情形下要重要多了。這意味著它可以集合許多小物體形成巨大質量，例如行星及恆星，然後產生巨大重力。另一方面，當電荷是相同符號時，靜電力是互斥的，因此它不能集合正電荷或負電荷形成高密度的電荷群，然後產生巨大靜電力。

21.6 電荷守恆

以絲絹摩擦玻璃棒，棒上就會出現正電荷。量測結果顯示，與此同時，絲絹上出現等量的負電荷。這暗示著摩擦並不能創造電荷，而是將電荷自一物體轉移至另一物體，在此過程中，每個物體的電中性已受到破壞。這個電荷守恆假說最早是由富蘭克林所提出，經過許多審慎的檢驗，包括大型的帶電物體以及原子、原子核等基本粒子。迄今尚未發現違反此一假設者。因此，除了能量、線動量以及角動量守恆定律之外，我們現在再加上電荷守恆定律。

原子核的放射性衰變(radioactive decay)是電荷守恆的重要範例，在這種衰變過程中，原子核會轉換成(變成)另一種不同類型的原子核。舉例來說，鈾238 原子核(238U)可以經由放射一個α 粒子(alpha particle)，轉換成釷234 原子核(234Th)。因為該粒子具有與氦4 原子核相同的組成，所以其表示符號是4He。

$$^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}\mathrm{Th} + {}^{4}\mathrm{He},$$

另一電荷守恆例子：當一電子(電量–e)和其反粒子即正電子e+(電量為+e)，經歷共滅過程(annihilation process)而轉化為兩道射線(高能光線)：

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \rightarrow \gamma + \gamma \qquad \text{(annihilation).}$$

與共滅過程相反的對生過程亦遵守電荷守恆原理。在此過程中射線會轉變為一個電子與正電子：

$$\gamma \rightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \qquad \text{(pair production).}$$

Fundamentals of Physics, 8^{th} Ed
Principle of Physics, 9^{th} Ed
Halliday & Resnic

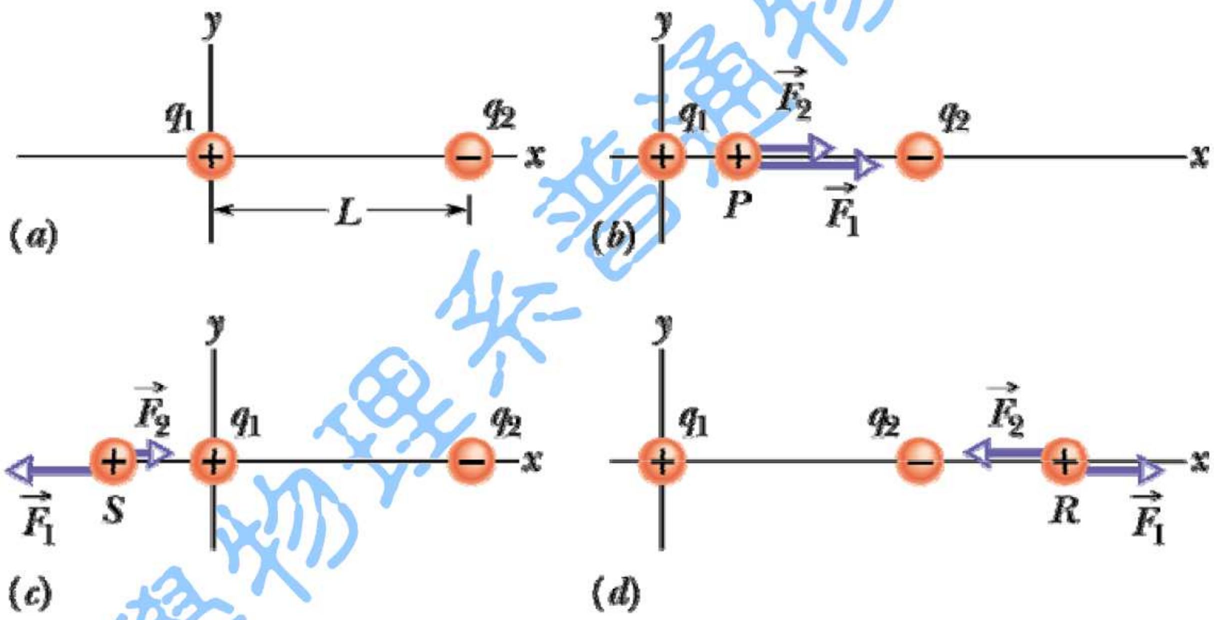
8^{th} Ed【CH21】Coulomb’s Law
9^{th} Ed【CH21】Electric Charge

8^{th} Ed：Homework of Chapter 21：
3, 5, 9, 15, 21, 29, 35, 54

8th Ed【Sample Problem 21-2】

Figure 21-10a shows two particles fixed in place: a particle of charge $q_1 = +8q$ at the origin and a particle of charge $q_2 = -2q$ at $x = L$. At what point (other than infinitely far away) can a proton be placed so that it is in equilibrium (the net force on it is zero)? Is that equilibrium stable or unstable?

圖 21-10 中，兩個粒子被固定在位置上，其中一個粒子 $q_1 = +8q$ 位於原點，另一個粒子 $q_2 = -2q$ 被固定在 $x = L$ 的地方。問在什麼位置（無限遠除外）可以放置一個質子，使之處於平衡狀態（它的淨力爲零）？那是穩定或不穩定的平衡？



（圖 21-10）

<解>：(1) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{8qq_p}{x^2}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2qq_p}{(x-L)^2}$

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\frac{x-L}{x}=\frac{1}{2}$$

$$x=2L$$

(2) unstable

8th Ed【Sample Problem 21-4】

The nucleus in an iron atom has a radius of about $4\times10^{-15}\,m$ and contains 26 protons.

(a) What is the magnitude of the repulsive electrostatic force between two of the protons that are separated by $4\times10^{-15}\,m$?

(b) What is the magnitude of the gravitational force between those same two protons?

鐵原子核的半徑約爲$4\times10^{-15}\,m$且包含了 26 顆質子(a)若兩鐵原子核相距$4\times10^{-15}\,m$，問兩者之間靜電排斥力大小爲何？(b) 兩者之間的重力大小又爲何？

$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,C^2/N\cdot m^2$ $\qquad G = 6.67\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2$

<解>：(a) $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2} = \left(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\right)\dfrac{\left(1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right)^2}{(4\times10^{-15}\,\mathrm{m})^2} = 14N$

(b) $F = G\dfrac{m_p^2}{r^2} = \left(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\dfrac{\left(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{C}\right)^2}{(4\times10^{-15}\,\mathrm{m})^2} = 1.2\times10^{-35}\,N$

重力作用遠遠小於電磁作用

8th Ed【Problem 21-3】: 9th Ed【Problem 21-5】

A particle of charge $+3\times10^{-6}C$ is 12cm distant from a second particle of charge $-1.5\times10^{-6}C$. Calculate the magnitude of the electrostatic force between the particles.

兩個帶電粒子相距 12cm，其中一個帶電 $+3\times10^{-6}C$，另一個粒子帶電 $-1.5\times10^{-6}C$。請計算兩個粒子間的電力大小。

<解>：The magnitude of the mutual force of attraction at $r = 0.120$ m is

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} = \left(8.99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\right)\frac{\left(3.00\times10^{-6}\,\mathrm{C}\right)\left(1.50\times10^{-6}\,\mathrm{C}\right)}{(0.120\ \mathrm{m})^2} = 2.81\,\mathrm{N}.$$

8th Ed【Problem 21-5】：9th Ed【Problem 21-1】

Of the charge Q initially on a tiny sphere, a portion q is to be transferred to a second, nearby sphere. Both spheres can be treated as particles. For what value of $\frac{q}{Q}$ will the electrostatic force between the two spheres be maximized?

電荷 Q 最初在一個很小的球裡，一部份的 q 轉移到第二個，附近的球。這兩個球可以被視爲粒子。問當 $\frac{q}{Q}$ 值多大時，在這兩個球間，靜電力爲最大？

<解>：The magnitude of the force of either of the charges on the other is given by

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Q-q)}{r^2}$$

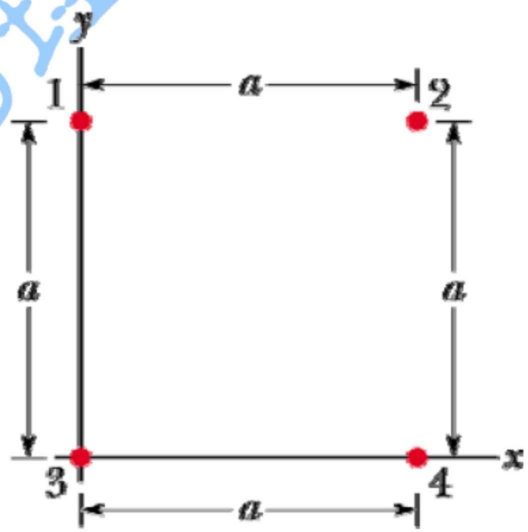
where r is the distance between the charges. We want the value of q that maximizes the function $f(q) = q(Q-q)$. Setting the derivative $\frac{dF}{dq}$ equal to zero leads to $Q-2q=0$, or $q = \frac{Q}{2}$. Thus, $\frac{q}{Q} = 0.5$.

想一想爲何爲0.5?

8^{th} Ed【Problem 21-8】: 9^{th} Ed【Problem 21-10】

In Fig. 21-23, four particles form a square. The charges are $q_1 = q_4 = Q$ and $q_2 = q_3 = q$. (a) What is $\dfrac{Q}{q}$ if the net electrostatic force on particles 1 and 4 is zero? (b) Is there any value of q that makes the net electrostatic force on each of the four particles zero? Explain.

在圖 21-23 中，四個帶電粒子構成了一四方形。它們的電量分別爲 $q_1 = q_4 = Q$；$q_2 = q_3 = q$。(a)當 Q/q 比值爲何時，分別作用在粒子 1 和 4 之淨力爲零？(b)有沒可能某一 q 值可使得分別作用四個粒子之淨力皆爲零？請解釋之。



（圖 21-23）

<解答>：For ease of presentation (of the computations below) we assume $Q > 0$ and $q < 0$ (although the final result does not depend on this particular choice).

(a) The x-component of the force experienced by $q_1 = Q$ is

$$F_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{(Q)(Q)}{\left(\sqrt{2}a\right)^2}\cos 45° + \frac{(|q|)\,(Q)}{a^2}\right) = \frac{Q|q|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(-\frac{Q/|q|}{2\sqrt{2}} + 1\right) = F_{1y}$$

(b) The x-component of the net force on $q_2 = q$ is

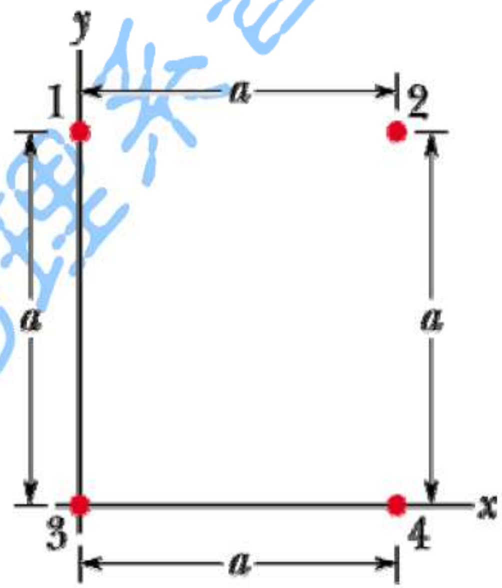
$$F_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q|^2}{\left(\sqrt{2}a\right)^2}\sin 45° - \frac{(|q|)\,(Q)}{a^2}\right) = \frac{|q|^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{Q}{|q|}\right) = F_{2y}$$

which (if we demand $F_{2x} = F_{2y} = 0$) leads to $Q/q = -1/2\sqrt{2}$. The result is inconsistent with that obtained in part (a). Thus, we are unable to construct an equilibrium configuration with this geometry, where the only forces present are given by Eq. 21-1.

8th Ed【Problem 21-9】: 9th Ed【Problem 21-11】

In Fig. 21-23, the particles have charges $q_1 = -q_2 = 100nC$ and $q_3 = -q_4 = 200nC$, and distance $a = 5cm$. What are the (a) x and (b) y components of the net electrostatic force on particle3?

圖 21-23 中，粒子的帶電量分別爲：$q_1 = -q_2 = 100nC$、$q_3 = -q_4 = 200nC$，距離$a = 5cm$。請問作用在粒子 3 的淨電力，其（a）x 分量　（b）y 分量分別爲何？



（圖 21-23）

<解>：The force experienced by q_3 is

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{34}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{|q_3||q_1|}{a^2}\hat{j} + \frac{|q_3||q_2|}{(\sqrt{2}a)^2}(\cos 45^0\,\hat{\mathrm{i}} + \sin 45^0\,\hat{\mathrm{j}}) + \frac{|q_3||q_4|}{a^2}\hat{\mathrm{i}}\right)$$

(a) Therefore, the x-component of the resultant force on q_3 is

$$F_{3x} = \frac{|q_3|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{|q_2|}{2\sqrt{2}} + |q_4|\right)$$

$$= \left(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\right)\frac{2\left(1.0\times10^{-7}\,\mathrm{C}\right)^2}{(0.050\ \mathrm{m})^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\right) = 0.17\,\mathrm{N}$$

(b) Similarly, the y-component of the net force on q_3 is

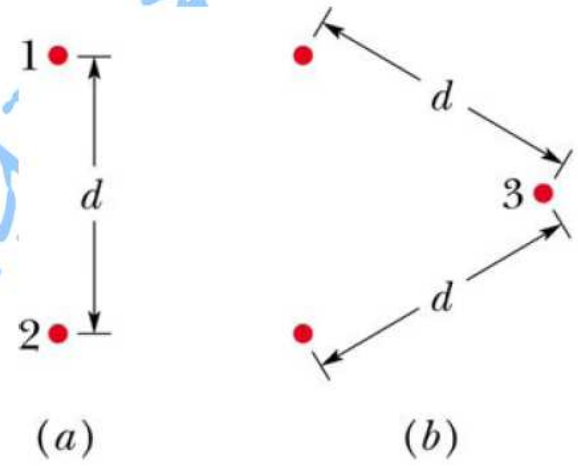
$$F_{3y} = \frac{|q_3|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(-|q_1| + \frac{|q_2|}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\right)\frac{2\left(1.0\times10^{-7}\,\mathrm{C}\right)^2}{(0.050\ \mathrm{m})^2}\left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -0.046\,\mathrm{N}$$

8^{th} Ed【Problem 21-13】: 9^{th} Ed【Problem 21-17】

In Fig. 21-26a, particles 1 and 2 have charge $20\mu C$ each and are held at separation distance $d = 1.5m$. (a) What is the magnitude of the electrostatic force on particle 1 due to particle 2? In Fig. 21-26b, particle 3 of charge $20\mu C$ is positioned so as to complete an equilateral triangle. (b) what is the magnitude of the net electrostatic force on particle 1 due to particle 2 and 3?

圖 21-26a 中，粒子 1 和 2 皆帶有 20μC 之電量，且固定其間距離爲 d = 1.5m。(a) 請問粒子 2 作用在粒子 1 之淨電力大小爲何？(b)在圖 21-26b 中，假設另一帶有 20μC 電量之粒子 3 放置於正三角之另一頂點，試問粒子 2 和 3 作用在粒子 1 之淨電力現又爲何？



（圖 21-26）

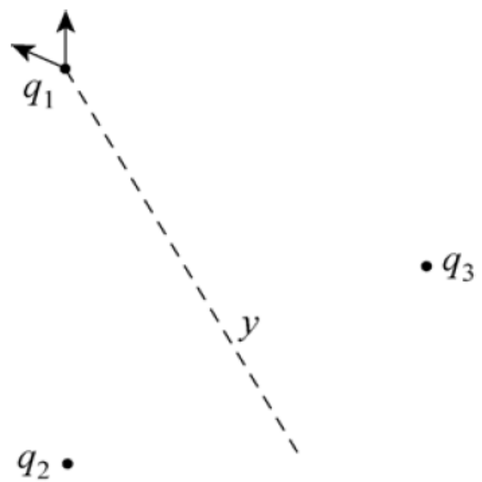
<解答>：(a) Eq. 21-1 gives

$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{d^2} = \left(8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2\right)\frac{\left(20.0\times10^{-6}\,\text{C}\right)^2}{(1.50\,\text{m})^2} = 1.60\,\text{N}.$$

(b) On the right, a force diagram is shown as well as our choice of *y* axis (the dashed line).

The *y* axis is meant to bisect the line between q_2 and q_3 in order to make use of the symmetry in the problem (equilateral triangle of side length *d*, equal-magnitude charges $q_1 = q_2 = q_3 = q$). We see that the resultant force is along this symmetry axis, and we obtain

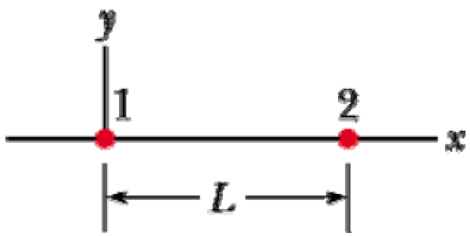
$$|F_y| = 2\left(k\frac{q^2}{d^2}\right)\cos 30^\circ = 2\left(8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2\right)\frac{\left(20.0\times10^{-6}\,\text{C}\right)^2}{(1.50\,\text{m})^2}\cos 30^\circ = 2.77\,\text{N}.$$



8th Ed【Problem 21-15】: 9th Ed【Problem 21-13】

In Fig. 21-28, particle 1 of charge $+1C$ and particle 2 of charge $-3C$ are held at separation $L=10cm$ on an x axis. If particle 3 of unknown charge q_3 is to be located such that the net electrostatic force on it from particles 1 and 2 is zero, what must be the (a) x and (b) y coordinates of particle 3?

圖 21-28 中，粒子 1 的帶電量為 $+1C$、粒子 2 的帶電量為 $-3C$，兩個粒子皆在 x 軸上，相距 10 公分。如果粒子 3（帶電量 q_3 為未知）被放置進來，粒子 1 和粒子 2 作用在粒子 3 的淨電力為零，試問粒子 3 的（a）x 和（b）y 坐標為何？



（圖 21-28）

<解>：(a) There is no equilibrium position for q_3 *between* the two fixed charges, because it is being pulled by one and pushed by the other (since q_1 and q_2 have different signs); in this region this means the two force arrows on q_3 are in the same direction and cannot cancel. It should also be clear that off-axis (with the axis defined as that which passes through the two fixed charges) there are no equilibrium positions. On the semi-infinite region of the axis which is nearest q_2 and furthest from q_1 an equilibrium position for q_3 cannot be found because $|q_1| < |q_2|$ and the magnitude of force exerted by q_2 is everywhere (in that region) stronger than that exerted by q_1 on q_3. Thus, we must look in the semi-infinite region of the axis which is nearest q_1 and furthest from q_2, where the net force on q_3 has magnitude

$$\left| k\frac{|q_1 q_3|}{L_0^2} - k\frac{|q_2 q_3|}{(L+L_0)^2} \right|$$

with L = 10 cm and L_0 is assumed to be *positive*. We set this equal to zero, as required by the problem, and cancel k and q_3. Thus, we obtain

$$\frac{|q_1|}{L_0^2} - \frac{|q_2|}{(L+L_0)^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{L+L_0}{L_0}\right)^2 = \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = \left|\frac{-3.0\ \mu\text{C}}{+1.0\ \mu\text{C}}\right| = 3.0$$

which yields (after taking the square root)

$$\frac{L+L_0}{L_0} = \sqrt{3} \Rightarrow L_0 = \frac{L}{\sqrt{3}-1} = \frac{10\text{ cm}}{\sqrt{3}-1} \approx 14\text{ cm}$$

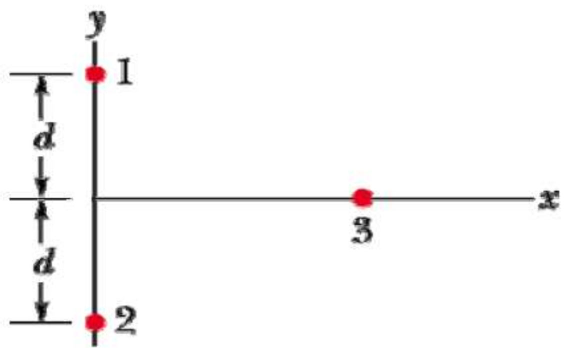
for the distance between q_3 and q_1. That is, q_3 should be placed at $x = -14$ cm along the x-axis.

(b) As stated above, $y = 0$

8th Ed【Problem 21-21】: 9th Ed【Problem 21-23】

In Fig. 21-31, particles 1 and 2 of charge $q_1 = q_2 = +3.2\times10^{-19}C$ are on a y axis at distance $d = 17cm$ from the origin. Particle 3 of charge $q_3 = +6.4\times10^{-19}C$ is moved gradually along the x axis from $x = 0$ to $x = +5m$. At what values of x will the magnitude of the electrostatic force on the third particle from the other two particles be (a) minimum and (b) maximum? What are the (c) minimum and (d) maximum magnitudes?

圖 21-31 中，粒子 1 和 2 的帶電量爲 $q_1 = q_2 = +3.2\times10^{-19}C$，二者位於 y 軸上，與原點的距離 $d = 17cm$。粒子 3（帶電量爲 $q_3 = +6.4\times10^{-19}C$），沿著 x 軸，從 $x = 0$ 移動到 $x = +5m$。請問粒子 3，在哪一個位置（x 座標），另外兩個粒子給它的靜電力爲：(a) 最小和 (b) 最大？粒子 3 所受的靜電力 (c) 最小值爲？(d) 最大值爲？



（圖 21-31）

<解>：If θ is the angle between the force and the x-axis, then $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$

We note that, due to the symmetry in the problem, there is no y component to the net force on the third particle. Thus, F represents the magnitude of force exerted by q_1 or q_2 on q_3. Let $e = +1.6\times10^{-19}\,C$, then $q_1 = q_2 = +2e$ and $q_3 = 4e$ and we have

$$F_{net} = 2F\cos\theta = \frac{2(2e)(4e)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+d^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{4e^2x}{\pi\varepsilon_0\left(x^2+d^2\right)^{3/2}}$$

(a) To find where the force is at an extremum, we can set the derivative of this expression equal to zero and solve for x, but it is good in any case to graph the function for a fuller understanding of its behavior – and as a quick way to see whether an extremum point is a maximum or a miminum. In this way, we find that the value coming from the derivative procedure is a maximum (and will be presented in part (b)) and that the minimum is found at the lower limit of the interval. Thus, the net force is found to be zero at $x = 0$, which is the smallest value of the net force in the interval 5.0 m $\geq x \geq$ 0.

(b) The maximum is found to be at $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ or roughly 12 cm

(c) The value of the net force at $x = 0$ is $F_{net} = 0$

(d) The value of the net force at $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ is $F_{net} = 4.9\times10^{-26}\,N$

8^{th} Ed【Problem 21-29】：9^{th} Ed【Problem 21-31】

Earth's atmosphere is constantly bombarded by cosmic ray protons that originate somewhere in space. If the protons all passed through the atmosphere, each square meter of Earth's surface would intercept protons at the average rate of 1500 protons per second. What would be the electric current intercepted by the total surface area of the planet?

地球的大氣層持續遭受由外太空所發射之宇宙射線質子的轟擊，若質子皆通過大氣層，每平方公尺地球表面攔截質子的平均速率為：1500 個/秒。請問由地球總表面積所攔截的電流大小為何？

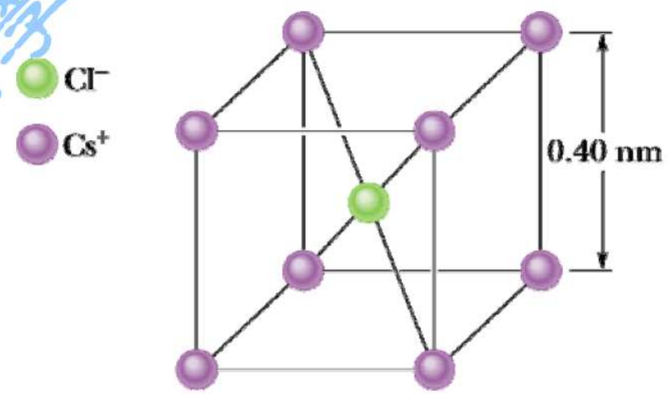
<解>：The unit Ampere is discussed in §21-4. The proton flux is given as 1500 protons per square meter per second, where each proton provides a charge of $q = +e$. The current through the spherical area $4\pi R^2 = 4\pi(6.37\times10^6 m)^2 = 5.1\times10^{14} m^2$ would be

$$i = \left(5.1\times10^{14}\ \mathrm{m}^2\right)\left(1500\,\frac{\mathrm{protons}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^2}\right)\left(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C/proton}\right) = 0.122\ \mathrm{A}.$$

8th Ed【Problem 21-35】: 9th Ed【Problem 21-35】

In crystals of the salt cesium chloride, cesium ions Cs^+ form the eight corners of a cube and a chlorine ion Cl^- is at the cube's center (Fig. 21-36). The edge length of the cube is 0.40 nm. The Cs^+ ions are each deficient by one electron (and thus each has a charge of $+e$), and the Cl^- ion has one excess electron (and thus has a charge of $-e$). (a) What is the magnitude of the net electrostatic force exerted on the Cl^- ion by the eight Cs^+ ions at the corners of the cube? (b) If one of the Cs^+ ions is missing, the crystal is said to have a defect; what is the magnitude of the net electrostatic force exerted on the Cl^- ion by the seven remaining Cs^+ ions?

在氯化銫的晶體中，銫離子Cs^+位於立方體的八個頂角，氯離子Cl^-位於立方體的中心(如圖. 21-36 所示)。此立方體的的邊長爲 0.40 nm，每個銫離子Cs^+皆缺少一個電子（因此每個Cs^+的帶電量爲$+e$），每個氯離子Cl^-皆多出一個電子（因此每個Cl^-的帶電量爲$-e$）。(a)請問由這八個Cs^+作用在Cl^-的淨電力大小爲何？(b)若此晶體少了一個Cs^+，意即我們所說的晶體缺陷，則由剩餘的七個Cs^+作用在Cl^-的淨電力大小爲何？



（圖 21-36）

<解>：(a) Every cesium ion at a corner of the cube exerts a force of the same magnitude on the chlorine ion at the cube center. Each force is a force of attraction and is directed toward the cesium ion that exerts it, along the body diagonal of the cube. We can pair every cesium ion with another, diametrically positioned at the opposite corner of the cube. Since the two ions in such a pair exert forces that have the same magnitude but are oppositely directed, the two forces sum to zero and, since every cesium ion can be paired in this way, the total force on the chlorine ion is zero.

(b) Rather than remove a cesium ion, we superpose charge $-e$ at the position of one cesium ion. This neutralizes the ion, and as far as the electrical force on the chlorine ion is concerned, it is equivalent to removing the ion. The forces of the eight cesium ions at the cube corners sum to zero, so the only force on the chlorine ion is the force of the added charge.

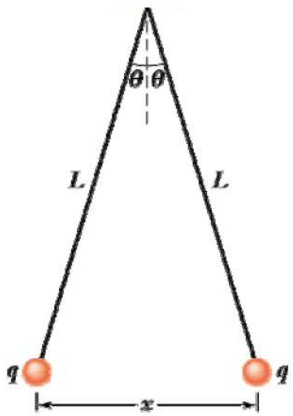
The length of a body diagonal of a cube is $\sqrt{3}a$, where a is the length of a cube edge. Thus, the distance from the center of the cube to a corner is $d = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. The force has magnitude

Since both the added charge and the chlorine ion are negative, the force is one of repulsion. The chlorine ion is pushed away from the site of the missing cesium ion.

8th Ed【Problem 21-54】: 9th Ed【Problem 21-42】

In Fig. 21-42, two tiny conducting balls of identical mass m and identical charge q hang from non conducting threads of length L. Assume that θ is so small that tan θ can be replaced by its approximate equal, $\sin\theta$. (a) Show that $x=\left(\dfrac{q^2L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$ gives the equilibrium separation x of the balls. (b) If $L=120cm$, $m=10g$, and $x=5cm$, what is $|q|$?

圖 21-42 中，兩個小球爲導體，具有相同的質量和相同的電荷 q，由一條長度 L 且不能導電的細線掛起來，假設θ很小，tan θ可以用近似値$\sin\theta$取代。(a) 證明兩球的平衡距離 $x=\left(\dfrac{q^2L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$。(b) 如果 $L=120cm$，$m=10g$，$x=5cm$，則$|q|$爲何？



(圖 21-42)

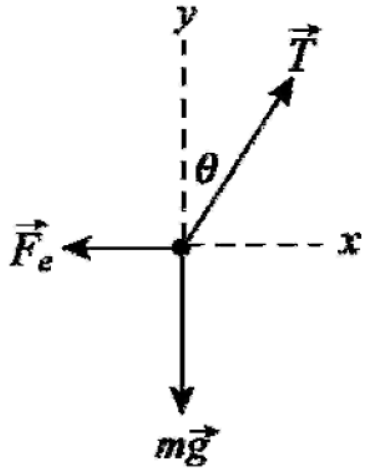
<解>：(a) A force diagram for one of the balls is shown on the right. The force of gravity $m\vec{g}$ acts downward, the electrical force $\vec{F}_e$ of the other ball acts to the left, and the tension in the thread acts along the thread, at the angle θ to the vertical. The ball is in equilibrium, so its acceleration is zero. The y component of Newton's second law yields $T\cos\theta - mg = 0$ and the x component yields $T\sin\theta - F_e = 0$. We solve the first equation for T and obtain $T = mg/\cos\theta$. We substitute the result into the second to obtain $mg\tan\theta - F_e = 0$.

Examination of the geometry of Figure 21-42 leads to $\tan\theta = \dfrac{x/2}{\sqrt{L^2 - (x/2)^2}}$.

If L is much larger than x (which is the case if θ is very small), we may neglect $x/2$ in the denominator and write $\tan\theta \approx x/2L$. This is equivalent to approximating $\tan\theta$ by $\sin\theta$.

The magnitude of the electrical force of one ball on the other is $F_e = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ by Eq. 21-4. When these two expressions are used in the equation $mg\tan\theta = F_e$, we obtain

$$\frac{mgx}{2L} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} \Rightarrow x \approx \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}.$$



(b) We solve $x^3 = 2kq^2L/mg$ for the charge (using Eq. 21-5):

$$q = \sqrt{\frac{mgx^3}{2kL}} = \sqrt{\frac{(0.010\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(0.050\,\text{m})^3}{2(8.99\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.20\,\text{m})}} = \pm 2.4\times10^{-8}\,\text{C}.$$

Thus, the magnitude is $|q| = 2.4\times10^{-8}$ C.