第22章

電場

22.2 電場

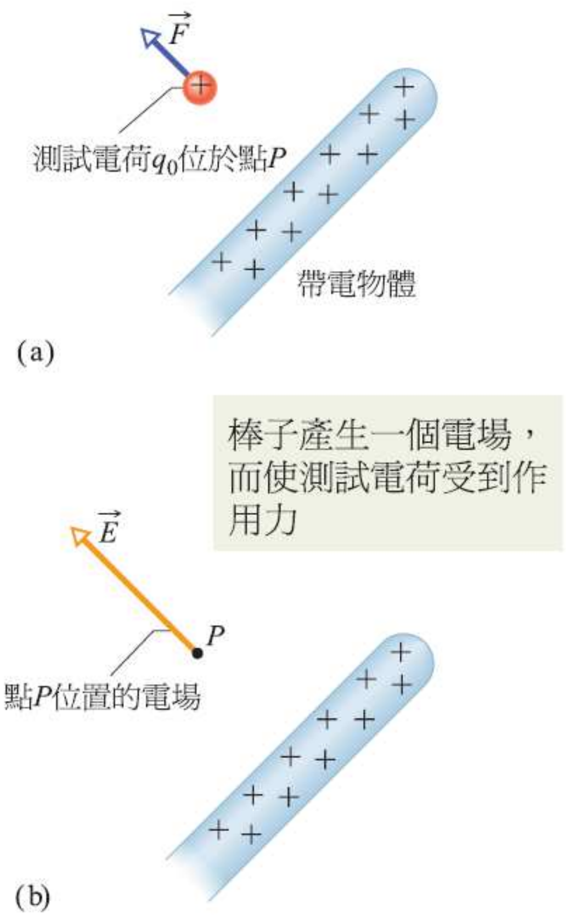


圖 22-1 (a) 正測試電荷位於靠近帶電物體的 P 點上。靜電力作用在該測試電荷上。(b) 帶電物體在 P 點處所產生的電場 $\vec{E}$ 。

電場為向量場

電場由帶電物體，如帶電棒，在周圍空間中每一點的電場向量分佈所組成。

可以下列方式定義帶電物體附近各點(如圖22-1a 中的P點)的電場：

•一個測試正電荷q_0置於該點，會受到靜電力**F**

•P點處由帶電物體所致之電場定義為：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad \text{(electric field).}$$

電場的SI單位為牛頓每庫侖(N/C)。

表 22-1

一些電場值

電場位置或情形	值(N/C)
在鈾原子核表面	3×10^{21}
在氫原子內，半徑 5.29×10^{-11}m	5×10^{11}
當空氣發生電擊時	3×10^{6}
靠近影印機的帶電滾筒	10^{5}
靠近帶電梳子	10^{3}
大氣層低處	10^{2}
家用電路銅質電線內部	10^{-2}

22.3 電場線

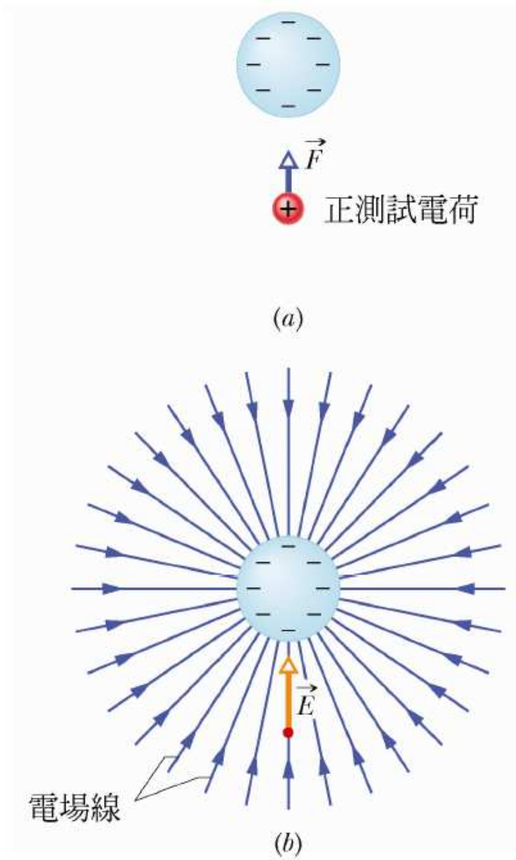


圖 22-2 作用於正測試電荷上的靜電力 $\vec{F}$，此測試電荷鄰近一個負電荷均勻分佈的球體，測試電荷處的電場向量 $\vec{E}$，及接近球體附近空間的電場線。這些場線指向帶負電的球體(這些場線可視為由極遠處的正電荷所發出)。

電場線是由正電荷出發，終於負電荷。

- 在任一點上，直線形場線的方向或曲線形場線的切線方向為該點電場的方向
- 和場線垂直的單位面積中所包含的場線數目，與該處電場的大小成正比

因此，場線越密的地方，電場越大；反之場線愈疏處的電場越小。

22.3 電場線

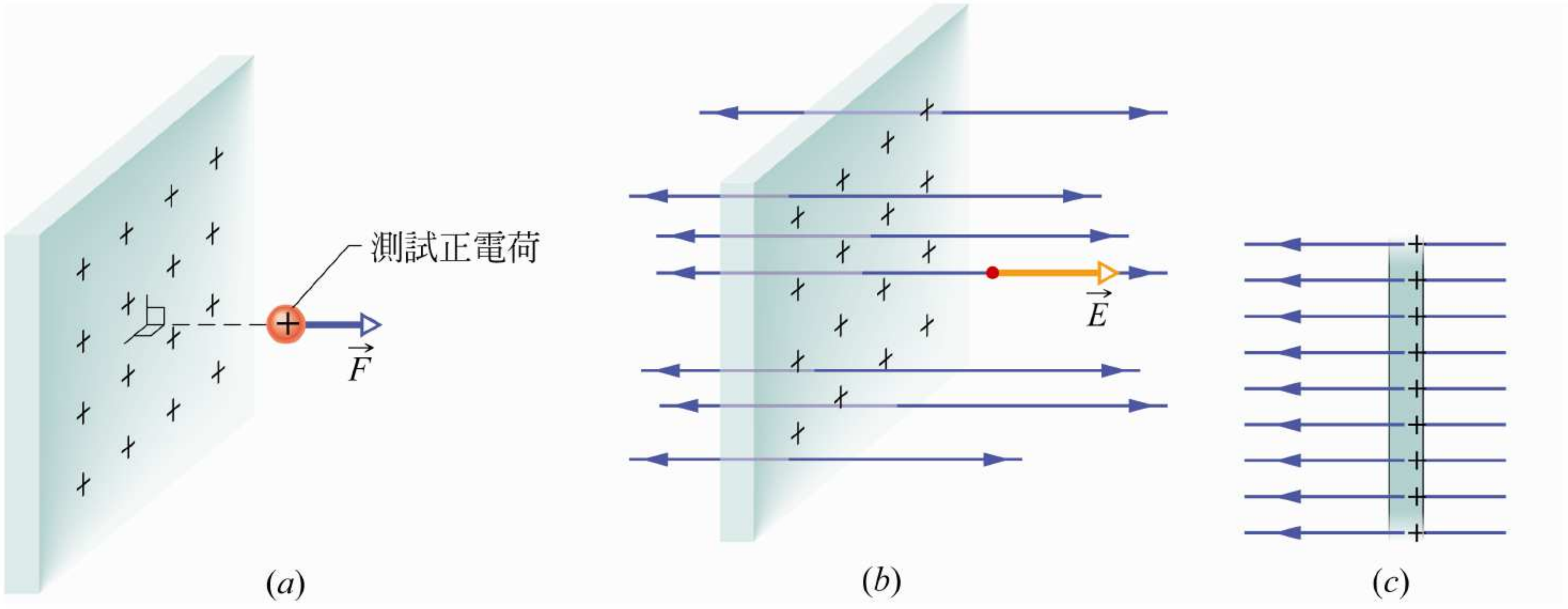


圖 22-3 (a)鄰近一非常大、一側均勻正電荷分佈的非導體平板，圖中顯示的是此時正測試電荷所受的靜電力為。(b)測試電荷處的電場向量，及接近球體附近空間的電場線。這些場線由此帶正電的平板向外延伸。(c)圖(b)的側視圖。

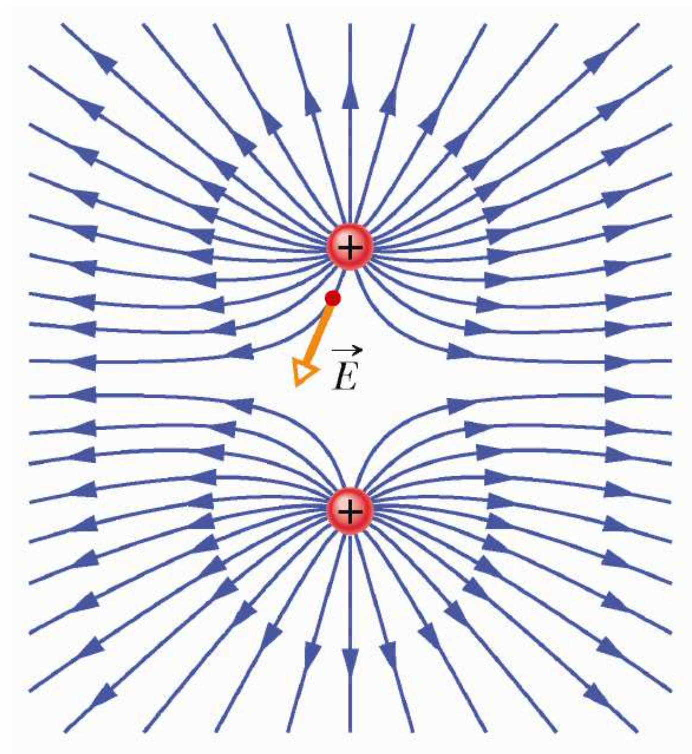


圖 22-4 兩個相等正電荷的場線圖。兩電荷相互排斥。(場線終於遠處的負電荷)欲「看到」電場線的三維圖樣，可以將上圖所示的電場線，以通過兩電荷之直線為軸加以旋轉。由此三維圖樣代表之電場相對於此軸形成旋轉對稱。圖中顯示出其中一點的電場；請注意其方向為在該點處電場線的切線方向。

22.4 點電荷產生的電場

要找出距一點電荷q(或帶電粒子)r 處的電場，我們可在該處放置一正測試電荷q_0。

若q 為正，則靜電力方向為指離電荷的方向；若q 為負，則靜電力為指向電荷的方向。由22-1 式可知，電場向量為：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathrm{r}} \qquad \text{(point charge).}$$

我們可以很快地找出由多個點電荷所造成的淨或合成電場。如果我們將一正測試電荷q_0 放在n 個點電荷$q_1, q_2, \ldots, q_n$ 附近，則由21-7 式可知，該n 個點電荷作用在測試電荷上的合力為

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \cdots + \vec{F}_{0n}.$$

測試電荷在該位置所受的淨電場為

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} \\ &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n.\end{aligned}$$

範例 22.1　三個帶電粒子產生的淨電場

圖 22-7a 中有三個距離原點皆為 d 的粒子，其帶電量分別為 $q_1 = +2Q$，$q_2 = -2Q$，$q_3 = -4Q$。則原點處的淨電場為何？

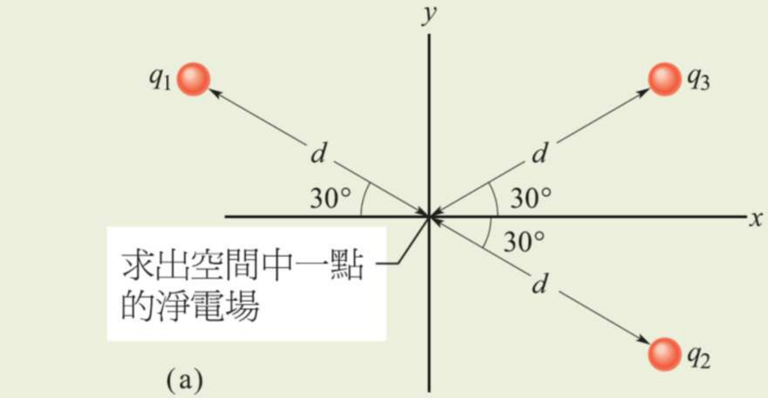
關鍵概念

若由電荷 q_1、q_2 及 q_3 在原點處造成之電場爲 $\vec{E}_1$、$\vec{E}_2$ 及 $\vec{E}_3$，則原點上之淨電場爲 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$。爲了得到這個總和的結果，我們須先找到這三個向量的大小及方向。

大小與方向　由 22-3 式且以 d 代替 r、以 $2Q$ 代替 q，我們可得到由 q_1 產生的電場之大小爲

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2}$$

同理，我們可得 $\vec{E}_2$ 及 $\vec{E}_3$ 的大小爲：



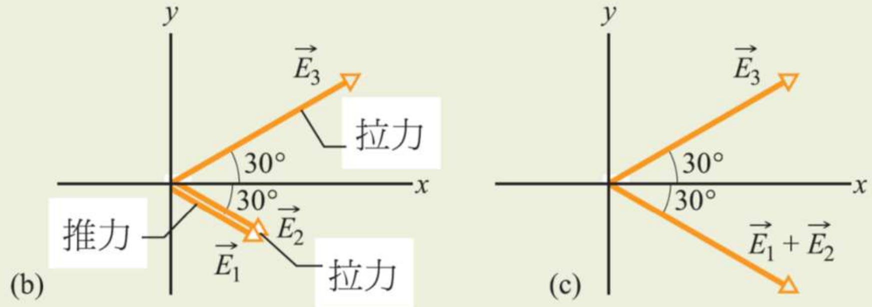


圖 22-7　(a)電荷 q_1、q_2、q_3 與原點的距離皆為 d。(b)這三個電荷在原點形成的電場向量分別為 $\vec{E}_1$、$\vec{E}_2$ 及 $\vec{E}_3$。(c)原點處的電場向量 $\vec{E}_3$ 與合向量 $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$。

$$E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2} \quad 及 \quad E_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2}$$

接下來我們必須找出那三個電場在原點處的方向。因爲 q_1 爲正，所以它的場向量是指向遠離它的方向，而 q_2 及 q_3 爲負，所以它們各自的場向量是指向它們自己的方向。圖 22-7b 爲此三個電場在原點上的方位向量圖(注意：我們已將場向量的起點畫在原點上，如此可減少錯誤產生。若向量的尾端畫在粒子上建立電場可能會造成錯誤)。

電場相加 我們現在可利用如 21 章中力的向量加法，將這些場以向量的方式相加起來。然而此處我們可以利用對稱性來簡化處理程序。由圖 22-7b 可知，$\vec{E}_1$ 與 $\vec{E}_2$ 的方向相同。因此，它們的向量和也是該方向，且大小爲：

$$E_1+E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{d^2}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}$$

它恰好與 $\vec{E}_3$ 的大小相同。

現在我們必須將 $\vec{E}_3$ 及 $\vec{E}_1+\vec{E}_2$ 合向量結合起來，這兩個向量大小相同並且對稱於 x 軸，如圖 22-7c 中所示。由圖 22-7c 中的對稱性可知，這兩個向量相等的 y 分量會相互抵消(因一朝上一朝下)，相等的 x 分量會相加。因此，原點處的淨電場 $\vec{E}$ 爲指向 x 軸的正方向，大小爲：

$$E=2E_{3x}=2E_3\cos 30^\circ$$
$$=(2)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{d^2}(0.866)=\frac{6.93Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \qquad \text{(答)}$$

22.5 電偶極產生的電場

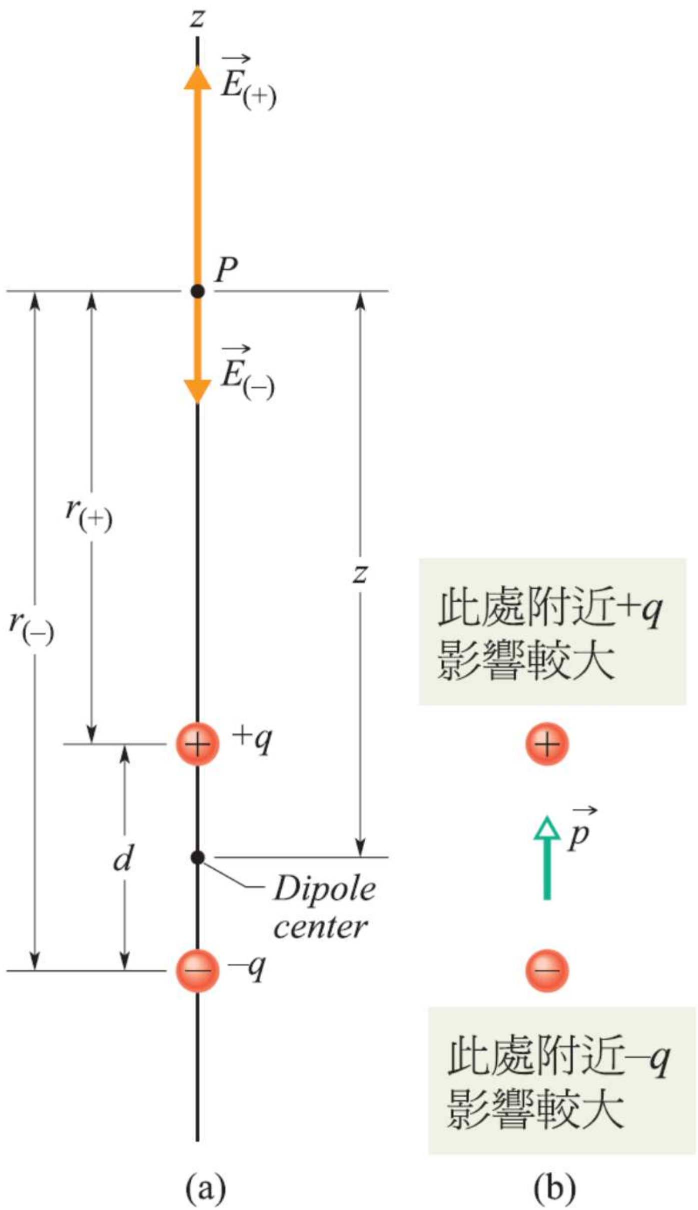
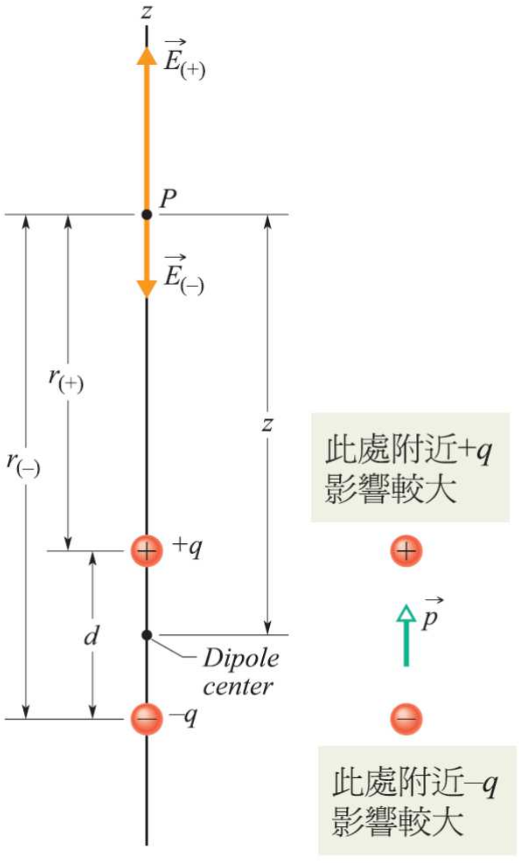


圖 22-8 (a)電偶極。由兩個電荷在 P 點所產生的電場分別為 $\vec{E}_{(+)}$ 與 $\vec{E}_{(-)}$。P 點與兩電荷的距離為與。(b)電偶極矩 $\vec{p}$ 之方向由負電荷指向正電荷。

22.5 電偶極產生的電場

由對稱性可知，構成電偶極的正、負電荷產生之電場$E(+)$與$E(-)$和其合成電場E，在P 點處的方向必然都是沿著偶極軸的方向。利用電場的疊加原理，可得P 點處的電場大小為



(a) (b)

$$E = E_{(+)} - E_{(-)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z-\frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z+\frac{1}{2}d)^2}.$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{d}{2z}\right)^2}\right).$$

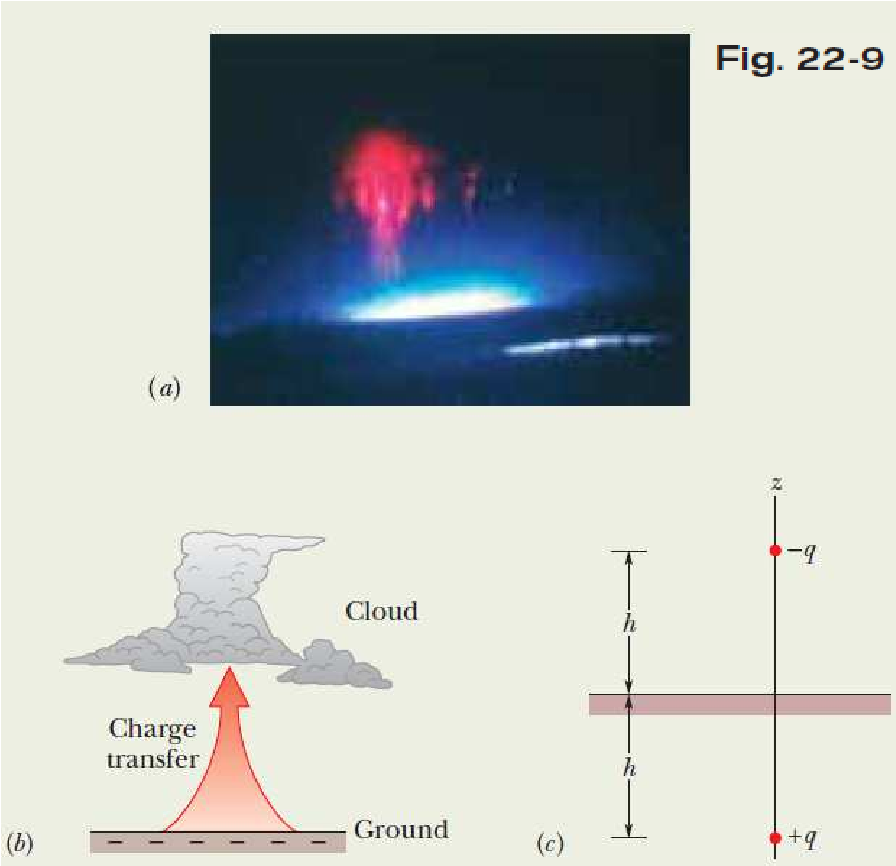
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{2d/z}{\left(1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z^3}\frac{d}{\left(1-\left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2}.$$

$$d/2z \ll 1 \longrightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3}.$$

中乘積項qd與電偶極的內部固有性質q 與d 相關，其等於一向量之大小p，此向量即為**電偶(雙)極矩**。

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3} \quad \text{(electric dipole)}.$$

Example, Electric Dipole and Atmospheric Sprites:



Sprites (Fig. 22-9*a)* are huge flashes that occur far above a large thunderstorm. They are still not well understood but are believed to be produced when especially powerful lightning occurs between the ground and storm clouds, particularly when the lightning transfers a huge amount of negative charge -*q* from the ground to the base of the clouds (Fig. 22-9*b).*

We can model the electric field due to the charges in the clouds and the ground by assuming a vertical electric dipole that has charge -*q* at cloud height *h* and charge +*q* at below-ground depth *h (Fig.* 22-9*c).* If $q = 200\ C$ and $h = 6.0$ km, what is the magnitude of the dipole's electric field at altitude $z_1 = 30\ km$ somewhat above the clouds and altitude $z_2 = 60$ km somewhat above the stratosphere?

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q(2h)}{z^3},$$

where $2h$ is the separation between $-q$ and $+q$ in Fig. 22-9*c*. For the electric field at altitude $z_1 = 30$ km, we find

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(200\ \mathrm{C})(2)(6.0\times10^3\ \mathrm{m})}{(30\times10^3\ \mathrm{m})^3}$$

$$= 1.6\times10^3\ \mathrm{N/C}. \qquad \text{(Answer)}$$

Similarly, for altitude $z_2 = 60$ km, we find

$$E = 2.0\times10^2\ \mathrm{N/C}. \qquad \text{(Answer)}$$

22.6 線電荷產生的電場

當我們處理連續電荷分佈的情況時，最方便是以電荷密度來表示物體上所帶的電量，而非總電量。例如線電荷分佈，我們會表示成線電荷密度(或單位長度上的電荷) λ，其單位是每公尺庫倫。

表22-2顯示其他會用到的電荷密度。

表 22-2

電荷的一些測量值

名稱	符號	SI 單位
電荷	q	C
線電荷密度	λ	C/m
面電荷密度	σ	C/m^2
體電荷密度	ρ	C/m^3

22.6 線電荷產生的電場

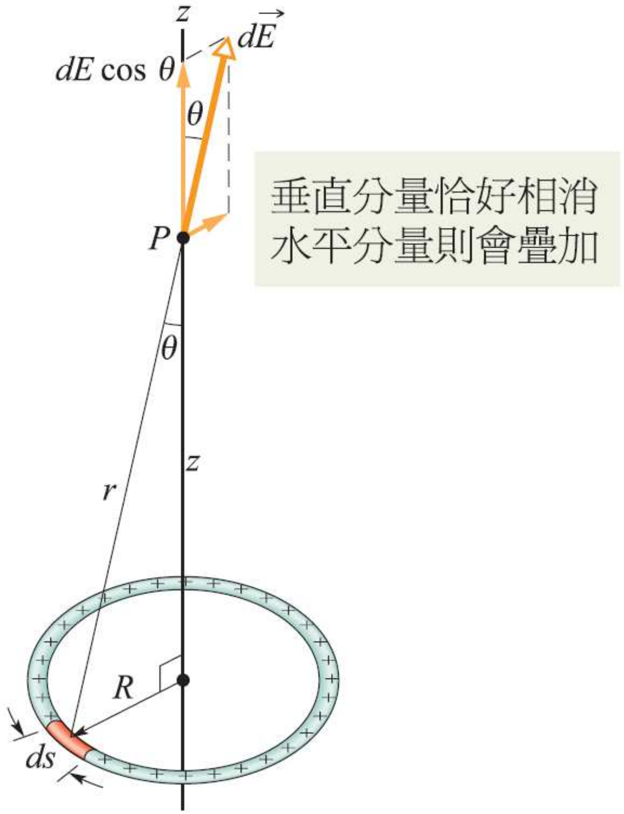


圖 22-10 帶有均勻正電荷的圓環。帶電的線微分元素之長度為 ds(為清楚起見已刻意放大)。此微分元素於 P 點建立一電場 $d\vec{E}$。而且其在圓環的中心軸上 $d\vec{E}$ 之分量為 dEcosθ。

可將圓環分割成許多微分元素，這些微分元素夠小而可被視為點電荷，如此一來，我們便可將22-3 式利用在它們身上。然後，我們可以將每個微分元素在P點所建立的電場疊加起來。這些向量和就是該環在P點建立的電場。令圓環的線微分元素長度(弧長)為ds。因為 λ 為單位長度(弧長)的電荷量，所以線微分元素所帶的電量為

$$dq = \lambda\, ds.$$

微分元素在P點建立微分電場$\boldsymbol{dE}$，離該元素距離r，

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}.$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{(z^2+R^2)}.$$

$\boldsymbol{dE}$均有平行於及垂直於該中央軸的分量；垂直分量大小皆同，但方向不同。平行分量為

$$dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\, ds.$$

最後，整個環可得

$$E = \int dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds$$

$$= \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

範例 22.3　帶電圓環的電場

圖 22-11a 中為一帶均勻電荷 $-Q$ 的塑膠棒。該棒被彎曲為一個 120 度，半徑 r 的圓弧。我們設置一個座標軸，使得圓弧對稱於 x 軸，且原點位於圓弧的曲率中心 P 點處。以 Q 及 r 表示該棒在 P 點處造成的電場為何？

關鍵概念

因爲該棒帶有連續的電荷分佈，所以我們必須找出每一個微分元素所造成電場的表示式，然後藉由微積分取其向量和。

一個元素　現在考慮微分元素的弧長爲 ds，並與 x 軸夾 θ 角(如圖 22-11b)。若我們以 λ 表示該棒的線電荷密度，則微分元素 ds 所帶的電荷量爲

$$dq = \lambda\, ds \tag{22-18}$$

元素的場　該微分元素會在距其 r 處的 P 點造成一微分電場 $d\vec{E}$。將此微分元素視爲一點電荷，則我們可重寫 22-3 式來表示 $d\vec{E}$ 的大小爲

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2} \tag{22-19}$$

因爲電荷 dq 爲負，所以 $d\vec{E}$ 的方向朝向 ds。

對稱伙伴　該微分元素有一與其對稱(鏡像元素)的微分元素 ds'，位於棒的下半部。在 P 點處由 ds' 造成的電場 $d\vec{E}'$ 之大小也是由 22-19 式所決定，但電場向量朝向 ds'，如圖 22-11d 所示。如果我們將 ds 與 ds' 的電場分解爲 x 及 y 分量，如圖 22-11e 及 f 所示，則其 y 分量將會互相抵消(因爲大小相等，但方向相反)。但 x 分量大小相同，且同向。

求和　因此，欲得到這根塑膠棒造成的電場，我們只需對棒上每個微分元素所造成的微分電場之 x 分量求和(積分)即可。由圖 22-11f 及 22-19 式可得，ds 之電場的 x 分量 dE_x 爲

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\, ds \tag{22-20}$$

22-20 式中有 θ、s 兩個變數。在積分之前，我們必須消除其中一個變數。利用下列的關係取代 ds

$$ds = r\,d\theta$$

其中 $d\theta$ 爲弧長 ds 對 P 點的張角(圖 22-11g)。經由這個代換，我們可對 22-20 式進行積分，角度範圍爲 $\theta = -60$ 度到 $\theta = 60$ 度，則我們可得到塑膠棒在 P 點處造成的電場爲

$$\begin{aligned} E &= \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta\, r\,d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-60^\circ}^{60^\circ}\cos\theta\,d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin\theta\right]_{-60^\circ}^{60^\circ} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)\right] \\ &= \frac{1.73\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned} \tag{22-21}$$

(如果我們將積分的上下限對調，我們可得到相同的結果，但多一負號。因爲此積分所求的只是 $\vec{E}$ 的大小，所以可將負號拿掉。)

電荷密度　接下來計算，因爲此環的總弧度爲 120 度，爲一完整圓的三分之一。所以其弧長爲 $2\pi r/3$，則其線電荷密度爲

$$\lambda = \frac{\text{電荷}}{\text{長度}} = \frac{Q}{2\pi r / 3} = \frac{0.477Q}{r}$$

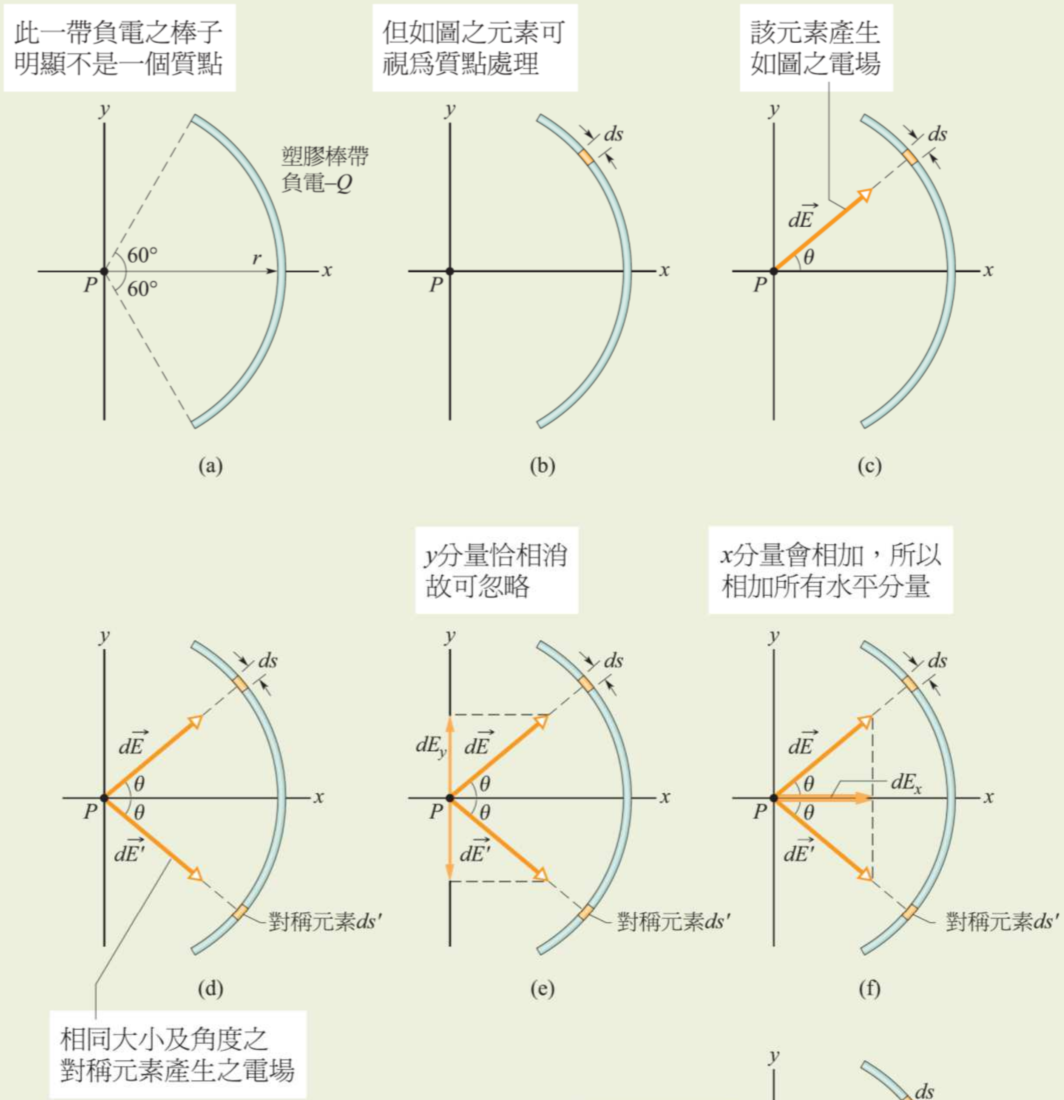
將上式代入 22-21 式，可化簡得

$$E = \frac{(1.73)(0.477Q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{0.83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{(答)}$$

$\vec{E}$ 的方向朝向塑膠棒，沿著電荷分佈的對稱軸。我們亦可以用單位向量標記法來表示 $\vec{E}$ 如下：

$$\vec{E} = \frac{0.83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathrm{i}}$$



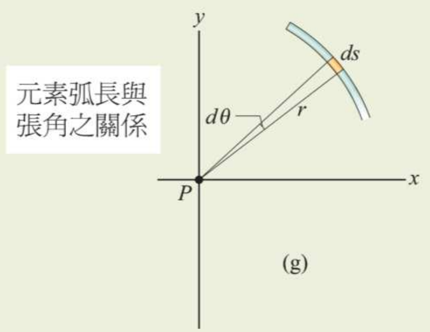
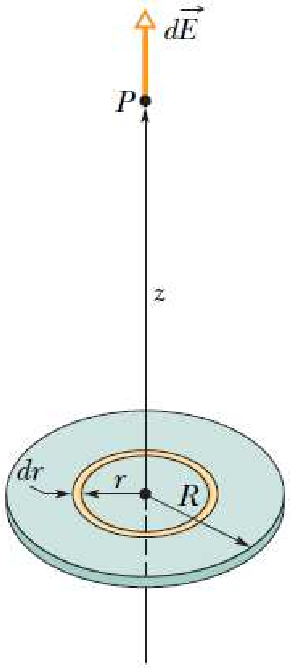


圖 22-11 (a)半徑 r 且中心角 120 度的塑膠圓棒，其帶電量為 $-Q$，P 點為其曲率中心。(b)-(c)圖中，該棒上半部的微分元與 x 軸夾 θ 角，長度為 ds，在 P 點處產生微分電場 $d\vec{E}$。(d)另一相對於 x 軸與 ds 成對稱的微分元 ds，在 P 點處產生大小相同的電場 $d\vec{E}'$。(e)-(f)電場分量。(g)弧長 ds 對 P 點的張角為 $d\theta$。

22.7 帶電圓盤產生的電場

欲求沿圓盤中央軸，距離z處的P點位置上的電場。將圓盤切割成同心環，再用積分求出所有環的貢獻。如圖示中之環，半徑r，徑向寬度dr。若σ為每單位面積之電荷，環上電荷為

$$dq = \sigma\, dA = \sigma\,(2\pi r\, dr),$$



利用每個環的dE在圓盤面積上作積分求出E，亦即對r積分，從$r = 0$ 到 $r = R$。

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\frac{2r\, dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2}(2r)\, dr. = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left[\frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^R.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \quad \text{(charged disk)}}$$

R無限大時

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{(infinite sheet)}.$$

22.8 電場中的點電荷

在外部電場中之帶電粒子若帶正電，則其所受的靜電力方向與相同，若其帶負電，則受力方向與電場反向。

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E},}$$

帶電荷 q之粒子位在電場 $\boldsymbol{E}$(其他靜止或緩慢移動之電荷所產生)中時，所受之靜電力$\boldsymbol{F}$由上式給出。

22.8 電場中的點電荷

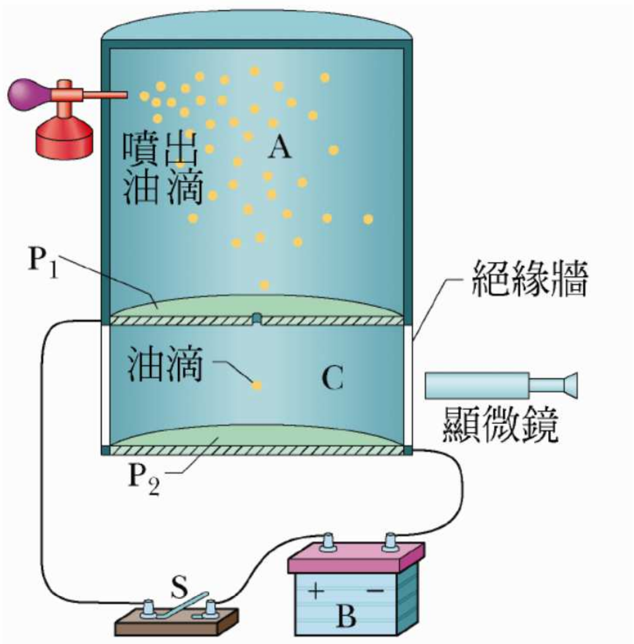


圖 25-14　用來量測基本電荷 e 的密立坎油滴裝置。當一帶電油滴經過平板 P1 上的小孔進入 C 室時，其運動可由開關 S 的啟閉(即消除或建立 C 室中的電場)來控制。顯微鏡是用來觀察油滴的運動，以對其運動所需時間進行量測。

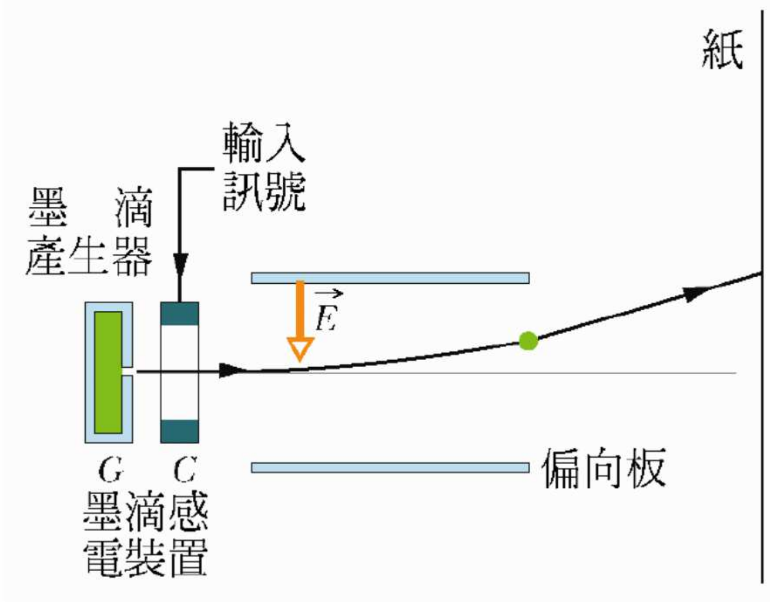


圖 22-15　噴墨印表機。墨滴由產生器 G 中射出，並經充電裝置 C 後帶電。一個由電腦所產生的訊號可控制每個墨滴所帶電量及其受到電場 $\vec{E}$ 的影響後在紙上到達的位置。

範例 22.4　電場中帶電粒子的運動

圖 22-17 顯示了噴墨式印表機的偏向板，圖中亦顯示出兩座標軸。質量 m 為 1.3×10^{-10} kg，帶負電 $Q = 1.5 \times 10^{-13}$ C 之墨滴進入兩偏向板間，且起初墨滴沿 x 移動，速度 v_x = 18 m/s。偏向板的長度 L 為 1.6 cm。偏向板充電因而在所有介於它們之間的點產生一電場。假設偏向板間之電場 $\vec{E}$ 為均勻向下，大小為 1.4×10^6 N/C。在偏向板末端，墨滴的垂直偏移量為何？(墨滴所受重力遠小於靜電力，可忽略不計)

關鍵概念

由於墨滴帶負電荷，且電場方向向下。由 22-28 式可知，一大小固定為 QE 之靜電力向上作用於墨滴。因此當墨滴沿著 x 軸以等速 v_x 運動，其以一等加速度 a_y 向上加速。

計算　對 y 軸分量應用牛頓第二運動定律($F = ma$)，可得：

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} \tag{22-30}$$

令 t 代表墨滴通過兩平板間區域所需的時間。在時間 t 之期間，墨滴的垂直及水平位移分別為：

$$y = \tfrac{1}{2} a_y t^2 \quad 與 \quad L = v_x t \tag{22-31}$$

消去此二方程式中的 t，並以 22-30 式代入 a_y 可得

$$\begin{aligned} y &= \frac{QEL^2}{2mv_x^2} \\ &= \frac{(1.5\times10^{-13}\ \mathrm{C})(1.4\times10^{6}\ \mathrm{N/C})(1.6\times10^{-2}\ \mathrm{m})^2}{(2)(1.3\times10^{-10}\ \mathrm{kg})(18\ \mathrm{m/s})^2} \quad (答) \\ &= 6.4\times10^{-4}\ \mathrm{m} \\ &= 0.64\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

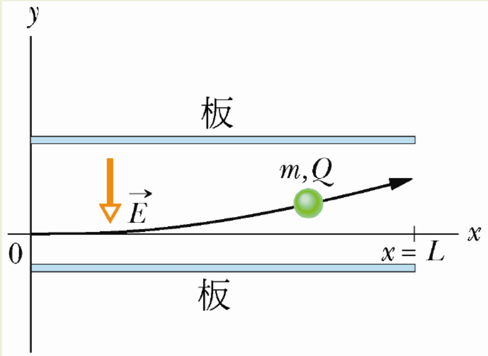


圖 22-17　墨滴的質量 m，帶電量 Q，在噴墨式印表機電場內之偏向情形。

22.9 電場中的電偶極

當電偶極置於有外部電場 $\boldsymbol{E}$之區域時，電偶極兩端受到靜電力。若電場均勻，兩端之受力方向相反而大小相等 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$。

雖然淨力為零，電偶極的質心不會移動，但繞質心的淨力矩$\boldsymbol{\tau}$不為零。

質心位於兩端之連線上，離兩端之距離為x及$d-x$。淨力矩為：

$$\tau = Fx\sin\theta + F(d-x)\sin\theta = Fd\sin\theta.$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \text{(torque on a dipole).}}$$

$$= pE\sin\theta.$$

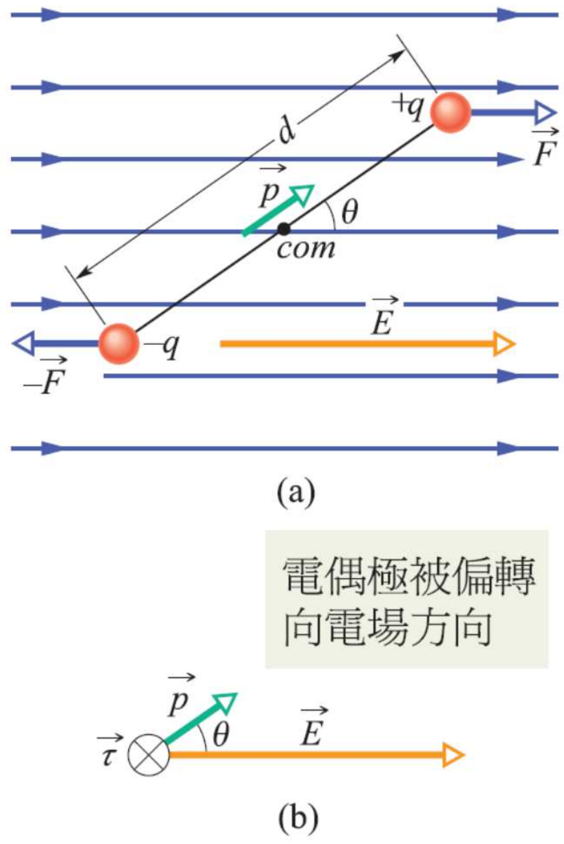


圖 22-19 (a)在均勻外部電場 $\vec{E}$ 中的電偶極。兩個電量相同但電性相反的電荷相距 d。它們之間的連線，表示它們為一個剛體連接。(b)電場 $\vec{E}$ 對偶極產生一個轉矩 $\vec{\tau}$。$\vec{\tau}$ 的方向是進入紙面的，以符號⊗表示。

22.9 電場中的電偶極：電位能

電位能與電偶極在電場中的方位有關。

電偶極在平衡方位時的電位能最低，此時偶極矩 $\boldsymbol{p}$ 與電場呈一直線。

要寫出電位能的表示式時，圖22-19中角度θ為90度時的電位能取為零會使表示式寫法最簡單。

電偶極的電位能U 與任意角度θ 的關係可由電偶極從90度轉到該角度中，電場之作功W求出。

$$U = -W = -\int_{90^\circ}^{\theta} \tau \, d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin\theta \, d\theta = -pE\cos\theta.$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{(potential energy of a dipole)}.$$

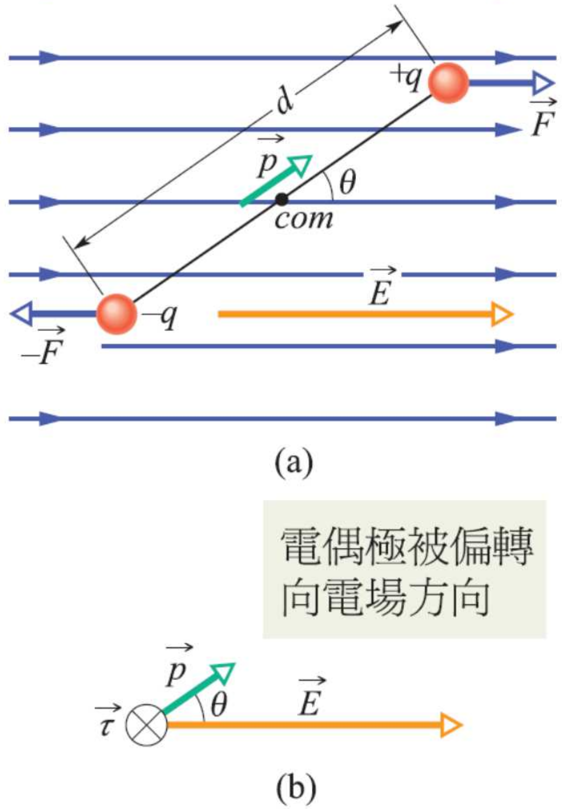


圖 22-19 (a)在均勻外部電場 $\vec{E}$ 中的電偶極。兩個電量相同但電性相反的電荷相距 d。它們之間的連線，表示它們為一個剛體連接。(b)電場 $\vec{E}$ 對偶極產生一個轉矩 $\vec{\tau}$。$\vec{\tau}$ 的方向是進入紙面的，以符號⊗表示。

範例 22.5　在電場中電偶極的力矩與能量

一中性水分子(H_2O)在氣態時之電偶極矩大小為 6.2×10^{-30} C · m。

(a)分子的正電荷與負電荷中心相距多遠？

關鍵概念

一個分子的偶極矩與正電荷和負電荷的電量 q，及其分開的距離 d 有關。

計算　中性分子中有 10 個電子與 10 個質子;所以偶極矩的大小可表爲

$$p = qd = (10e)(d)$$

其中 d 是欲求的距離，e 是基本電荷。因此

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{6.2\times10^{-30}\ \mathrm{C\cdot m}}{(10)(1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C})} = 3.9\times10^{-12}\ \mathrm{m} = 3.9\ \mathrm{pm} \quad \text{(答)}$$

此一距離極小，甚至小於氫原子的半徑。

(b)如果分子放在 1.5×10^4 N/C 的電場中，此電場作用於分子的最大力矩為何？(此一電場可在實驗室中輕易的產生。)

關鍵概念

當 $\vec{p}$ 與 $\vec{p}$ 的夾角 θ 爲 90 度時，偶極矩爲最大。

計算　將 $\theta = 90°$ 代入 22-33 式

$$\tau = pE\sin\theta = (6.2\times10^{-30}\ \mathrm{C\cdot m})(1.5\times10^{4}\ \mathrm{N/C})(\sin 90°) = 9.3\times10^{-26}\ \mathrm{N\cdot m} \quad \text{(答)}$$

(c)假設分子原來和電場方向一致，即 $\theta = 0$，欲使此分子在電場中倒轉 180 度，則外界必須作多少功？

關鍵概念

由外界(即外力對分子施以一力矩)所做的功等於分子因方向轉變產生的位能變化量。

計算　由 22-40 式，可得

$$\begin{aligned} W_a &= U_{180°} - U_0 \\ &= (-pE\cos180°) - (-pE\cos0) \\ &= 2pE = (2)(6.2\times10^{-30}\ \mathrm{C\cdot m})(1.5\times10^{4}\ \mathrm{N/C}) \\ &= 1.9\times10^{-25}\ \mathrm{J} \end{aligned} \quad \text{(答)}$$

電場之計算(補充教材)

由庫倫定律所導出之點電荷電場 $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$

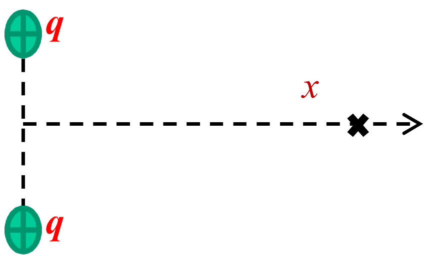
配合疊加原理之運用，即可得之

【解題技巧】

運用對稱和已知系統電場之疊加，可讓問題簡化易解

範例22-1 ：

兩相距 d 帶有 q 之相同點電荷，在對稱軸 (定為座標 X 軸)上之任一距原點為 x 處的電場



解：

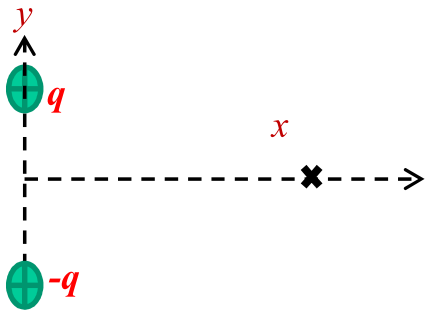
由於對稱，淨電場必在 x 軸上，且大小為單一點電荷在 x 軸上投影的 2 倍；即得

$$\vec{E} = \hat{i}\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \hat{i}\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

電場之計算

範例22-2：(電偶極之電場)

兩相距 d 帶有$\pm q$ 之點電荷，在對稱軸 上之任一距原點為 x 處的電場



解：

由於對稱，淨電場必在 $-y$ 軸上，且大小為單一點電荷在 y 軸上投影的 2 倍；即得

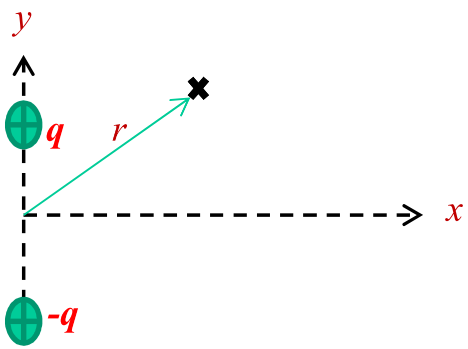
$$\vec{E} = -\hat{j}\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} = -\hat{j}\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{3/2}} \quad where\ \ \vec{p} \equiv q\vec{d}$$

電場之計算

範例22-2.1：(電偶極之電場)

兩相距 d 帶有$\pm q$ 之點電荷，在任一 $\vec{r}$ 處之電場為



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\vec{p}\bullet\hat{r}\right)\hat{r} - \vec{p}\right] \qquad where\ \ \vec{p} \equiv q\vec{d}$$

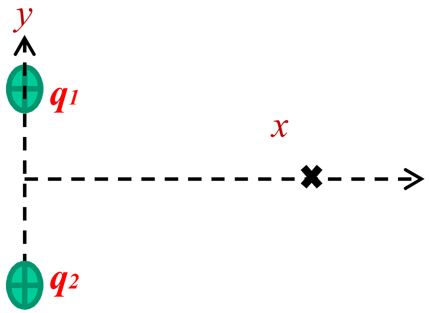
說明：

此結果的演算過程和求得，若用電場直接計算方式較為困難，而用電位的方式則較為簡單。容等到講授電位之計算時，再行推導。

電場之計算

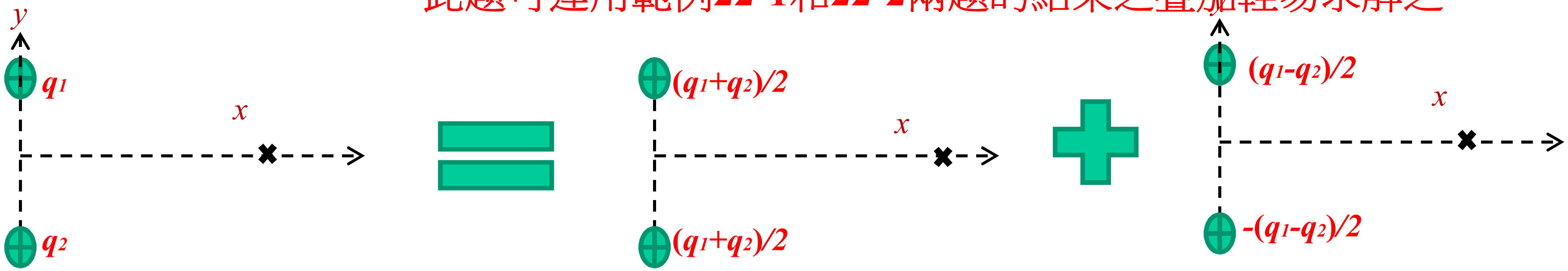
範例22-3：

相距 d 帶有 q_1 和 q_2 之兩點電荷，在 x 軸上之任一點的電場



解：

此題可運用範例22-1和22-2兩題的結果之疊加輕易求解之

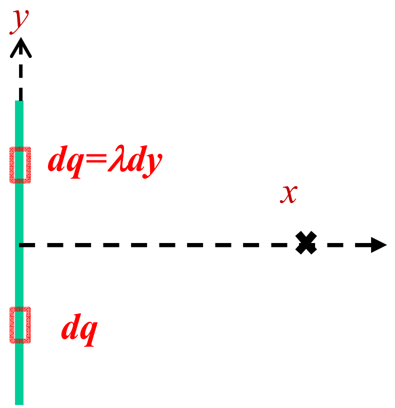


$$\vec{E}=\hat{i}\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{3/2}}-\hat{j}\frac{(q_1-q_2)d}{8\pi\varepsilon_0 x^3}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

電場之計算

範例22-4 ：

總電荷為 Q，電荷均勻分布在一長為 $2a$ 之線段上，在對稱軸 (定為座標X 軸)上之任一距原點 為 x 處的電場



解：

可運用範例**22-1**之結果的疊加求解之

將線段視為無窮多的兩相同點電荷對 (相距為 $2|y|$ ，即範例中之 d 值) 之疊加

$$\vec{E}=\hat{i}\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\int_o^a \frac{dy}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{3/2}}=\hat{i}\frac{2\lambda x}{4\pi\varepsilon_0}\int_o^a \frac{dy}{\left[x^2+y^2\right]^{3/2}}=\hat{i}\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{1/2}}=\hat{i}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]^{1/2}}$$

利用教課本附錄 E.19之積分公式

$$\int\frac{dy}{\left[x^2+y^2\right]^{3/2}}=\frac{1}{x^2}\frac{y}{\left[x^2+y^2\right]^{1/2}}$$

電場之計算

範例22-5 ：

電荷均勻分布 (線電荷密度為 λ) 的無窮長之長直導線， 距長導線 x 處之電場

解：

利用範例**22-4**之結果，將 a 值趨於無限大，即可得之

$$\vec{E} = \lim_{a \to \infty} \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{1/2}} \hat{i} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \hat{i}$$

電場之計算

範例22-6 ：

總電荷為 Q 均勻分布 (線電荷密度為 λ) 在一半徑為 R 之圓環上， 在圓環中心軸上距圓環圓心 z 點處之電場

解：此題為教課本之內容，故過程不再重覆述說

$$\vec{E}=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{k}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{1}{\left[1+\left(\dfrac{R}{z}\right)^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

電場之計算

範例22-7 ：

總電荷為 Q 均勻分布 (面電荷密度為 σ) 在一半徑為 R 之圓盤上， 在圓盤中心軸上距圓盤圓心 z 點處之電場

解： 此題為亦教課本之內容，故過程不再重覆述說

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)\hat{k} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{|z|\sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2}}\right]\hat{k}$$

電場之計算

範例22-8：

電荷均勻分布 (面電荷密度為 σ) 之無窮大平板， 距平板 x 處之電場大小與距離無關，皆為

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

解：

利用範例**22-7**之結果，將 R 值趨於無限大，即可得之。

電場之計算

範例22-9.1 ：

兩平行且電荷均勻分布之無窮大平板 (其面電荷密度為 皆σ) ， 在兩平板間內之電場大小皆為零，而在其外皆為

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

範例22-9.2 ：

兩平行且電荷均勻分布之無窮大平板 (其面電荷密度別為+σ和-σ) ， 在兩平板間外之電場大小皆為零，而在其內皆為

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

解：

利用範例**22-8**結果之疊加，即可得之。

電場之計算

範例22-10 ：

總電荷為 Q 均勻分布 (面電荷密度為 σ) 在一半徑為 R 之球殼上，在距球殼球心 r 點處之電場

解： 可將球殼視為無窮多的共軸圓環之疊加，然計算過程過於複雜，在此省略，僅將結果(亦可由下一章高斯定律推導之)呈現如下：

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{;when } r > R \\ 0 & \text{;when } r < R \end{cases}$$

電場之計算

範例22-11 ：
總電荷為 Q 均勻分布 (體電荷密度為 ρ) 在一半徑為 R 之球體上，在距球體球心 r 點處之電場

解： 可將球體視為無窮多的共球心球殼之疊加，即可得之。

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & ;\text{when } r > R \\ \dfrac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \dfrac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0} & ;\text{when } r < R \end{cases} \quad ;where\ \ \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Fundamentals of Physics, 8th Ed
Principle of Physics, 9th Ed
Halliday & Resnic

8th Ed【CH22】Finding the Electric Field I
9th Ed【CH22】Electric Field

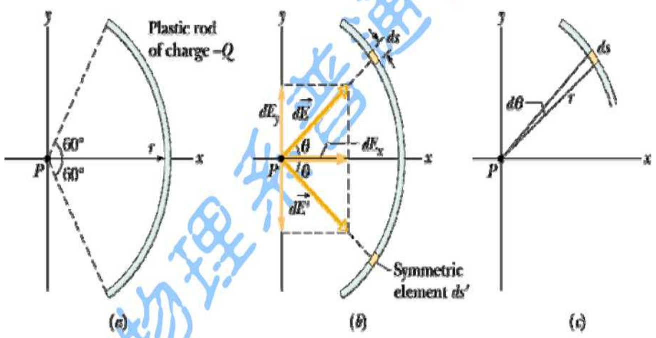
8th Ed：Homework of Chapter 22：
1, 5, 9, 13, 19, 23, 27, 31, 39, 49, 51, 57, 59

8^{th} Ed【Sample Problem 22-3】

Figure 22-11a shows a plastic rod having a uniformly distributed charge $-Q$. The rod has been bent in a 120^0 circular arc of radius r. We place coordinate axes such that the axis of symmetry of the rod lies along the x axis and the origin is at the center of curvature P of the rod. In terms of Q and r, what is the electric field $\vec{E}$ due to the rod at point P?

圖 22-11a 顯示電荷$-Q$ 均勻分佈在一橡膠棒，且此棒被彎成夾角爲 120°半徑爲 r 之圓弧狀。若圓弧棒之圓心爲座標原點，且座標軸選在對稱方向。試求此系統在原點 P 之電場 $\vec{E}$。

<解>：$\lambda = \dfrac{Q}{\frac{2\pi r}{3}} = \dfrac{0.477Q}{r}$



(圖 22-11)

$$E = \int dE_x = \int_{-60^0}^{60^0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta r d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-60^0}^{60^0}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}[\sin\theta]_{-60^0}^{60^0} = \frac{1.73\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1.73}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{0.477Q}{r}\right) = \frac{0.83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{0.83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{i}$$

8^{th} Ed【Sample Problem 22-4】

Figure 22-18 shows the deflecting plates of an ink-jet printer, with superimposed coordinate axes. An ink drop with a mass m of $1.3\times10^{-10}kg$ and a negative charge of magnitude $Q=1.5\times10^{-13}C$ enters the region between the plates, initially moving along the x axis with speed $v_x=18m/s$. The length L of each plate is 1.6 cm. The plates are charged and thus produce an electric field at all points between them. Assume that field $\vec{E}$ is downward directed, is uniform, and has a magnitude of $1.4\times10^{6}N/C$. What is the vertical deflection of the drop at the far edge of the plates? (The gravitational force on the drop is small relative to the electrostatic force acting on the drop and can be neglected.)

圖 22-18 顯示了噴墨式印表機的偏向板與座標軸。一質量為 m (= $1.3\text{x}10^{-10}$kg)帶有負電 Q (= $1.5\text{x}10^{-13}$C) 之墨滴進入兩偏向板間，起初墨滴沿 x 軸方向移動，速度 v_x (= 18 m/s)。偏向板的長度為 L (= 1.6 cm)。現將偏向板充電，導致在其間之所有點產生了一均勻向下之電場 (大小為 $1.4\text{x}10^{6}$N/C)。問在偏向板末端，墨滴的垂直偏移量為何？(墨滴所受之重力遠小於靜電力，可忽略不計)

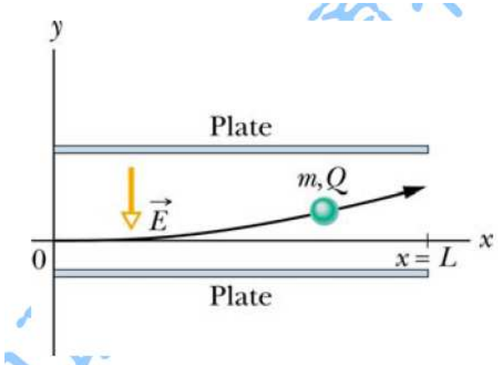
<解>： $F=ma=QE$

只有 y 方向有受力，因此 $a_y=\dfrac{QE}{m}$

$$y=\frac{1}{2}a_y t^2$$

$$L=v_x t$$

$$y=\frac{1}{2}\frac{QEL^2}{mv_x^2}=0.64mm$$

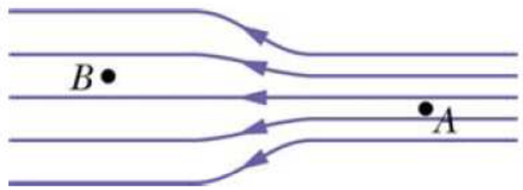


（圖 22-18）

8th Ed【Problem 22-1】: 9th Ed【Problem 22-2】★

In Fig. 22-30 the electric field lines on the left have twice the separation of those on the right. (a) If the magnitude of the field at A is 40N/C, what is the magnitude of the force on a proton at A? (b) What is the magnitude of the field at B?

在圖 22-30 中，左邊電力線的間隔爲右邊的兩倍。(a)若 A 的電場強度爲 40N/C，有一個質子位於 A 點，作用在質子的電力大小爲何？(b)B 的電場強度爲何？



（圖 22-30）

<解>：(a) We note that the electric field points leftward at both points. Using $\vec{F} = q_0\vec{E}$, and orienting our x axis rightward (so $\hat{\mathrm{i}}$ points right in the figure), we find

$$\vec{F} = \left(+1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\right)\left(-40\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{i}}\right) = (-6.4\times10^{-18}\,\mathrm{N})\,\hat{\mathrm{i}}$$

which means the magnitude of the force on the proton is 6.4×10^{-18} N and its direction $(-\hat{\mathrm{i}})$ is leftward.

(b) As the discussion in §22-2 makes clear, the field strength is proportional to the "crowdedness" of the field lines. It is seen that the lines are twice as crowded at A than at B, so we conclude that $E_A = 2E_B$. Thus, $E_B = 20N/C$.

8th Ed【Problem 22-5】; 9th Ed【Problem 22-3】

The nucleus of a plutonium-239 atom contain 94 protons. Assume that the nucleus is a sphere with radius 6.64 fm and with the charge of the protons uniformly spread through the sphere. At the nucleus surface, what are the (a) magnitude and (b) direction (radially inward or outward) of the electric field produced by the protons?

鈽-239 的原子核中有 94 個質子。假設原子核爲一半徑 6.64 fm 的球體，所有的質子均勻地分佈在整個球體。請問在球體表面上，由質子所產生的電場 (a)強度爲多少？(b)方向爲？（輻射狀指向球內或輻射狀指向球外）？

<解>：Since the charge is uniformly distributed throughout a sphere, the electric field at the surface is exactly the same as it would be if the charge were all at the center. That is, the magnitude of the field is $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

where q is the magnitude of the total charge and R is the sphere radius.

(a) The magnitude of the total charge is Ze, so

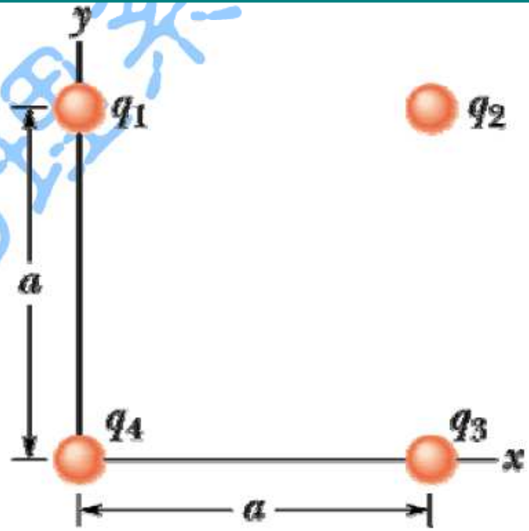
$$E=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\left(8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}\right)(94)\left(1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C}\right)}{\left(6.64\times10^{-15}\ \mathrm{m}\right)^2}=3.07\times10^{21}\ \mathrm{N/C}.$$

(b) The field is normal to the surface and since the charge is positive, it points outward from the surface.

8th Ed【Problem 22-9】: 9th Ed【Problem 22-7】

In Fig. 22-32, the four particles form a square of edge length $a = 5cm$ and have charges $q_1 = +10nC$, $q_2 = -20nC$, $q_3 = +20nC$, and $q_4 = -10nC$. In unit-vector notation, what net electric field do the particles produce at the square's center?

圖 22-32 中，有四個粒子排列成一個邊長 $a = 5cm$ 的正方形， 四個粒子的帶電量分別爲：$q_1 = +10nC$ 、 $q_2 = -20nC$ 、 $q_3 = +20nC$ 、 $q_4 = -10nC$ 。請用單位向量符號的表達形式，寫出四個粒子在正方形中心所產生的淨電場？



（圖 22-32）

<解>：The x component of the electric field at the center of the square is given by

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{|q_1|}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2} + \frac{|q_2|}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2} - \frac{|q_3|}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2} - \frac{|q_4|}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2}\right]\cos 45^0$$

$$= \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)(\frac{a^2}{2})}(|q_1| + |q_2| - |q_3| - |q_4|)\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Similarly, the y component of the electric field is

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{|q_1|}{(a/\sqrt{2})^2} + \frac{|q_2|}{(a/\sqrt{2})^2} + \frac{|q_3|}{(a/\sqrt{2})^2} - \frac{|q_4|}{(a/\sqrt{2})^2}\right]\cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2/2}(-|q_1| + |q_2| + |q_3| - |q_4|)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}\right)(2.0\times10^{-8}\ \mathrm{C})}{(0.050\ \mathrm{m})^2/2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 1.02\times10^5\ \mathrm{N/C}.$$

Thus, the electric field at the center of the square is $\vec{E} = E_y\hat{j} = \left(1.02\times10^5\,N/C\right)\hat{j}$

8^{th} Ed【Problem 22-13】: 9^{th} Ed【Problem 22-15】

In Fig. 22-36, the three particles are fixed in place and have charges $q_1 = q_2 = +e$ and $q_3 = +2e$. Distance $a = 6\,\mu m$. What are the (a) magnitude and (b) direction of the net electric field at point P due to the particles?

在圖 22-36 中，有三個粒子，其位置固定，帶電量分別為：$q_1 = q_2 = +e$ 、$q_3 = +2e$ 。距離 $a = 6\,\mu m$ 。請問粒子在 P 點所建立的淨電場(a)大小　及(b)方向分別為何？

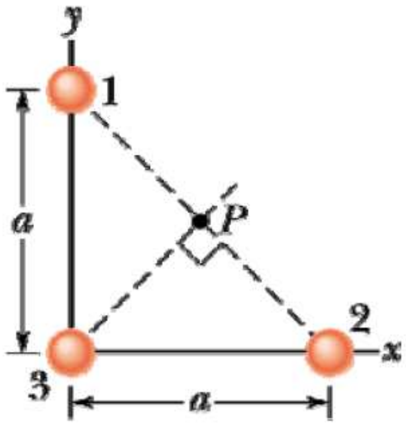
<解>：By symmetry we see the contributions from the two charges $q_1 = q_2 = +e$ cancel each other, and we simply use Eq. 22-3 to compute magnitude of the field due to $q_3 = +2e$

(a) The magnitude of the net electric field is

$$|\vec{E}_{\text{net}}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e}{(a/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e}{a^2}$$

$$= (8.99\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{4(1.60\times10^{-19}\ \text{C})}{(6.00\times10^{-6}\ \text{m})^2} = 160\ \text{N/C}.$$

(b) This field points at 45^0, counterclockwise from the x axis.



（圖 22-36）

8^{th} Ed【Problem 22-19】: 9^{th} Ed【Problem 22-19】

Figure 22-41 shows an electric dipole. What are the (a) magnitude and (b) direction (relative to the positive direction of the x axis) of the dipole's electric field at point P, located at distance $r >> d$?

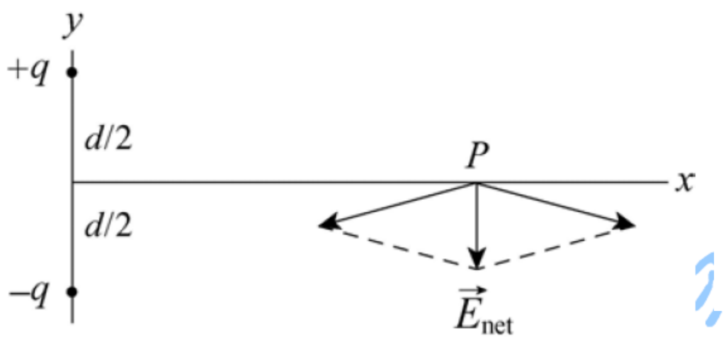
圖 22-41 中有一電偶極。若 $r >> d$ ，請問電偶極在 P 點所建立的的電場(a)大小？(b)方向（相對於正 x 軸的方向）？

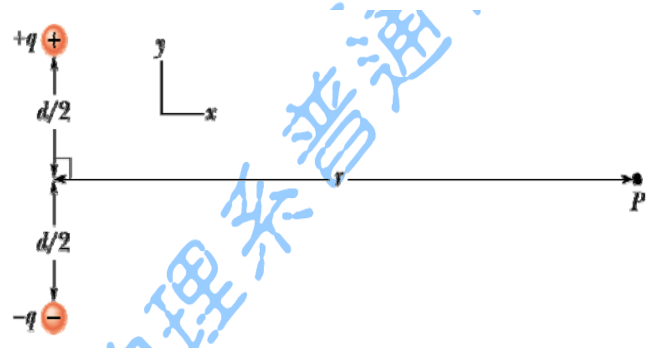
<解>：(a) Consider the figure below. The magnitude of the net electric field at point P is

$$\left|\vec{E}_{\text{net}}\right| = 2E_1 \sin\theta = 2\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(d/2)^2 + r^2}\right]\frac{d/2}{\sqrt{(d/2)^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{\left[(d/2)^2 + r^2\right]^{3/2}}$$

For $r \gg d$, we write $[(d/2)^2 + r^2]^{3/2} \approx r^3$ so the expression above reduces to

$$|\vec{E}_{\text{net}}| \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{r^3}.$$





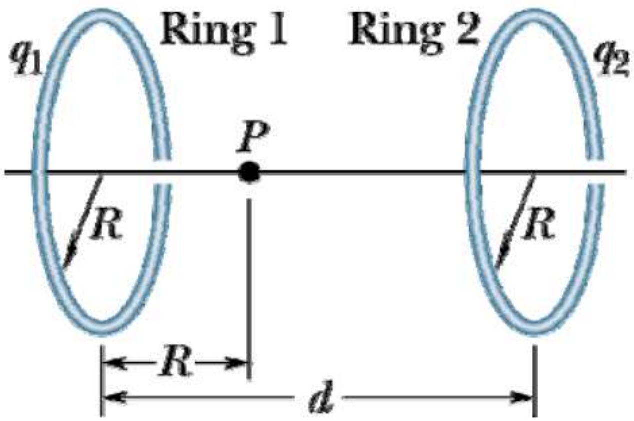
（圖 22-41）

(b) From the figure, it is clear that the net electric field at point P points in the $-\hat{j}$ direction, or -90^0 from the +x axis.

8th Ed【Problem 22-23】: 9th Ed【Problem 22-23】

Figure 22-43 shows two parallel nonconducting rings with their central axes along a common line. Ring 1 has uniform charge q_1 and radius R; ring 2 has uniform charge q_2 and the same radius R. The rings are separated by distance $d = 3R$. The net electric field at point P on the common line, at distance R from ring 1, is zero. What is the ratio $\frac{q_1}{q_2}$?

圖 22-43 為兩個平行的非導體環，兩個環的軸心相同。第一個環 Ring 1 具有均勻分佈的電荷 q_1、半徑為 R；第二個環 Ring 2 具有均勻分佈的電荷 q_2、半徑亦為 R。兩個環的距離：$d = 3R$。P 點位於軸心上，與 Ring 1 的距離為 R，若 P 點的淨電場為零，則 $\frac{q_1}{q_2}$ 的比值為何？



（圖 22-43）

<解>：We use Eq. 22-3, assuming both charges are positive. At P, we have

Eq. 22-16 $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$

$$E_{\text{left ring}} = E_{\text{right ring}} \Rightarrow \frac{q_1 R}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{q_2(2R)}{4\pi\varepsilon_0[(2R)^2 + R^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{\left(2R^2\right)^{3/2}} = \frac{2q_2}{\left(5R^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = 2\left(\frac{2}{5}\right)^{3/2}$$

we obtain $\dfrac{q_1}{q_2} = 2\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3/2} \approx 0.506.$

8^{th} Ed【Problem 22-27】: 9^{th} Ed【Problem 22-31】

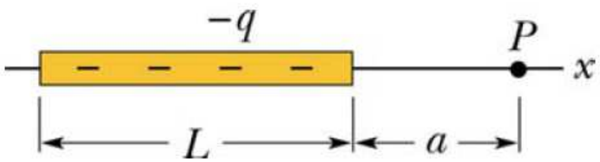
In Fig. 22-46, a noncom ducting rod of length $L = 8.15cm$ has charge $-q = -4.23\,fC$ uniformly distributed along its length. (a) What is the linear charge density of the rod? What are the (b) magnitude and (c) direction (relative to the positive direction of the x axis) of the electric field produced at point P, at distance $a = 12cm$ from the rod? What is the electric field magnitude produced at distance $a = 50m$ by (d) the rod and (e) a particle of charge $-q = -4.23\,fC$ that replaces the rod?

在圖 22-46 中，有一非導體的棒子：長度 $L = 8.15cm$ 、具有均勻電荷 $-q = -4.23\,fC$ ，(a)請求出棒子的線電荷密度？

若 P 點與棒子的距離 $a = 12cm$ ，則棒子在 P 點所建立的電場(b)大小？(c)方向？（相對於正 x 軸的方向）

(d)若 P 點與棒子的距離 $a = 50cm$ ，則棒子在 P 點所建立的電場大小？

(e)若帶電量維持 $-q = -4.23\,fC$ ，將棒子改成點電荷，則 $a = 50cm$ 時，點電荷在 P 點所建立的電場大小？



（圖 22-46）

<解>：(a) The linear charge density is the charge per unit length of rod. Since the charge is uniformly distributed on the rod,

$$\lambda = \frac{-q}{L} = \frac{-4.23\times10^{-15}C}{0.0815m} = -5.19\times10^{-14}C/m$$

(b) We position the x axis along the rod with the origin at the left end of the rod, as shown in the diagram.

Let dx be an infinitesimal length of rod at x. The charge in this segment is $dq = \lambda\, dx$. The charge dq may be considered to be a point charge. The electric field it produces at point P has only an x component and this component is given by

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{(L+a-x)^2}.$$

The total electric field produced at P by the whole rod is the integral

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{(L+a-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{L+a-x}\right|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{L+a}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{a(L+a)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(L+a)},$$

下頁續

upon substituting $-q=\lambda L$. With $q=4.23\times10^{-15}C$, $L=0.0815m$ and $a=0.12m$, we obtain $E_x=-1.57\times10^{-3}$ N/C, or $|E_x|=1.57\times10^{-3}$ N/C.

(c) The negative sign in E_x indicates that the field points in the –x direction, or -180^0 counterclockwise form the +x axis.

(d) If a is much larger than L, the quantity L + a in the denominator can be approximated by a and the expression for the electric field becomes

$$E_x=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

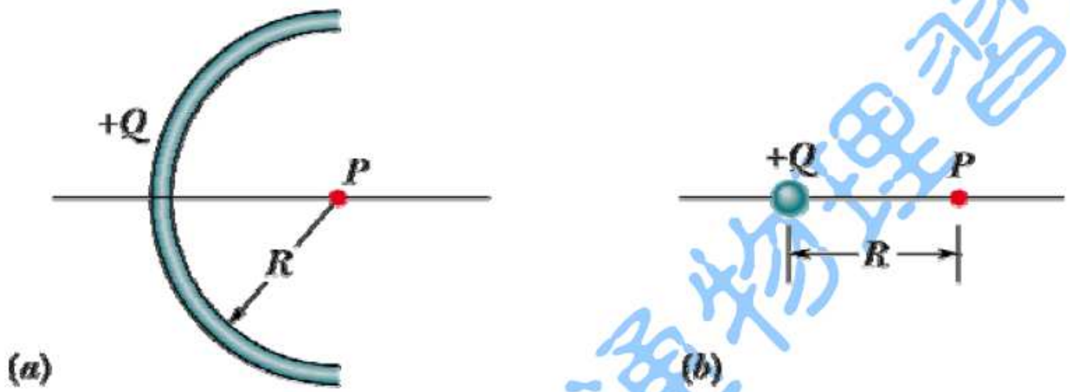
Since $a=50$ m $\gg L=0.0815$ m, the above approximation applies and we have $E_x=-1.52\times10^{-8}$ N/C, or $|E_x|=1.52\times10^{-8}$ N/C.

(e) For a particle of charge $-q=-4.23\times10^{-15}$ C, the electric field at a distance a = 50 m away has a magnitude $|E_x|=1.52\times10^{-8}$ N/C.

8th Ed【Problem 22-31】: 9th Ed【Problem 22-29】

Figure 22-50a shows a nonconducting rod with a uniformly distributed charge $+Q$. The rod forms a half-circle with radius R and produces an electric field of magnitude E_{arc} at its center of curvature P. If the arc is collapsed to a point at distance R from P (Fig. 22-50b), by what factor is the magnitude of the electric field at P multiplied?

圖 22-50 爲一非導電的棒子，具有均勻分佈的電量 $+Q$。將棒子彎成半徑 R 的半圓形，其在圓心 P 點所建立的電場強度爲 E_{arc}。若將這段弧長壓縮成一個點，這個點與 P 點的距離爲 R（如圖 22-50b 所示），則 P 點的電場強度變爲原來的幾倍？



（圖 22-50）

<解>：First, we need a formula for the field due to the arc. We use the notation λ for the charge density, $\lambda = \dfrac{Q}{L}$. Sample Problem 22-3 illustrates the simplest approach to circular arc field problems. Following the steps leading to Eq. 22-21, we see that the general result (for arcs that subtend angle θ) is $E_{\text{arc}} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin(\theta/2) - \sin(-\theta/2)\right] = \dfrac{2\lambda\sin(\theta/2)}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Now, the arc length is $L = r\theta$ if θ is expressed in radians. Thus, using *R* instead of *r*, we obtain $E_{\text{arc}} = \dfrac{2(Q/L)\sin(\theta/2)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{2(Q/R\theta)\sin(\theta/2)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{2Q\sin(\theta/2)}{4\pi\varepsilon_0 R^2\theta}$.

The problem asks for the ratio $\dfrac{E_{\text{particle}}}{E_{\text{arc}}}$ where E_{particle} is given by Eq. 22-3:

$$\frac{E_{\text{particle}}}{E_{\text{arc}}} = \frac{Q/4\pi\varepsilon_0 R^2}{2Q\sin(\theta/2)/4\pi\varepsilon_0 R^2\theta} = \frac{\theta}{2\sin(\theta/2)}.$$

With $\theta = \pi$, we have $\dfrac{E_{\text{particle}}}{E_{\text{arc}}} = \dfrac{\pi}{2} \approx 1.57$.

8th Ed【Problem 22-39】：9th Ed【Problem 22-43】

An electron is released from rest in a uniform electric field of magnitude $2\times10^{4}\,N/C$. Calculate the acceleration of the electron. (Ignore gravitation.)

一個電子在強度為 $2\times10^{4}\,N/C$ 的電場中，由靜止狀態中被釋放出來，請計算電子的加速度（不考慮重力）

<解>：The magnitude of the force acting on the electron is $F = eE$, where E is the magnitude of the electric field at its location. The acceleration of the electron is given by Newton's second law: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{eE}{m} = \dfrac{\left(1.60\times10^{-19}\ \text{C}\right)\left(2.00\times10^{4}\ \text{N/C}\right)}{9.11\times10^{-31}\ \text{kg}} = 3.51\times10^{15}\ \text{m/s}^2$.

8th Ed【Problem 22-49】: 9th Ed【Problem 22-55】

A uniform electric field exists in a region between two oppositely charged plates. An electron is released from rest at the surface of the negatively charged plate and strikes the surface of the opposite plate, 2.0 cm away, in a time $1.5\times10^{-8}s$. (a) What is the speed of the electron as it strikes the second plate? (b) What is the magnitude of the electric field $\vec{E}$?

兩個電性相反的板子間，具有一均勻的電場。一個電子原本處於靜止狀態，由帶負電的板子上被釋放出來，撞擊到帶正電的板子上，電子所走的距離爲 2.0 cm，歷時$1.5\times10^{-8}s$。 (a) 請求出電子撞擊到第二片板子時的速度爲多少？(b)請求出電場$\vec{E}$的大小？

<解>：(a) We use $\Delta x = v_{avg}t = vt/2$:

$$v = \frac{2\Delta x}{t} = \frac{2\left(2.0\times10^{-2}\,\text{m}\right)}{1.5\times10^{-8}\,\text{s}} = 2.7\times10^{6}\ \text{m/s}.$$

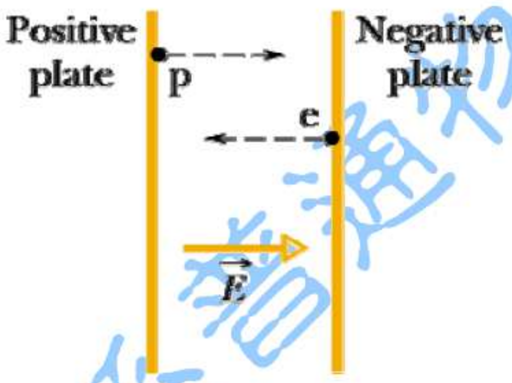
(b) We use $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$ and $E = F/e = ma/e$:

$$E = \frac{ma}{e} = \frac{2\Delta xm}{et^2} = \frac{2\left(2.0\times10^{-2}\,\text{m}\right)\left(9.11\times10^{-31}\,\text{kg}\right)}{\left(1.60\times10^{-19}\,\text{C}\right)\left(1.5\times10^{-8}\,\text{s}\right)^2} = 1.0\times10^{3}\ \text{N/C}.$$

8th Ed【Problem 22-51】: 9th Ed【Problem 22-53】

Two large parallel copper plates are 5.0 cm apart and have a uniform electric field between them as depicted in Fig.22-56. An electron is released from the negative plate at the same time that a proton is released from the positive plate. Neglect the force of the particles on each other and find their distance from the positive plate when they pass each other. (Does it surprise you that you need not know the electric field to solve this problem?)

如圖 22-56 所示，兩片很大的平行銅板，相隔 5.0 cm，銅板間具有一均勻電場 $\vec{E}$。一個電子由負電板上被釋放出來，同時間，一個質子由正電板上被釋放出來。若不考慮粒子間的交互作用，請求出，當兩個粒子交會時，粒子與正電板的距離爲何？（在未知電場情況下，即可解出本題，是否令你感到驚訝？）



（圖 22-56）

<解>：We take the positive direction to be to the right in the figure. The acceleration of the proton is $a_p = \frac{eE}{m_p}$ and the acceleration of the electron is $a_e = -\frac{eE}{m_e}$, where E is the magnitude of the electric field, m_p is the mass of the proton, and m_e is the mass of the electron. We take the origin to be at the initial position of the proton. Then, the coordinate of the proton at time t is $x = \frac{1}{2}a_p t^2$ and the coordinate of the electron is $x = L + \frac{1}{2}a_e t^2$. They pass each other when their coordinates are the same, or $\frac{1}{2}a_p t^2 = L + \frac{1}{2}a_e t^2$. This means $t^2 = \frac{2L}{a_p - a_e}$ and

$$x = \frac{a_p}{a_p - a_e}L = \frac{eE/m_p}{(eE/m_p) + (eE/m_e)}L = \left(\frac{m_e}{m_e + m_p}\right)L$$

$$= \left(\frac{9.11\times10^{-31}\,\text{kg}}{9.11\times10^{-31}\,\text{kg} + 1.67\times10^{-27}\,\text{kg}}\right)(0.050\,\text{m})$$

$$= 2.7\times10^{-5}\,\text{m}.$$

8th Ed【Problem 22-57】: 9th Ed【Problem 22-57】

An electric dipole consisting of charges of magnitude 1.50 nC separated by $6.2\mu m$ is in an electric field of strength $1100 N/C$. What are (a) the magnitude of the electric dipole moment and (b) the difference between the potential energies E for dipole orientations parallel and antiparallel to $\vec{E}$?

一電量大小為 1.50 nC、距離為$6.2\mu m$的電偶極，被放置在$1100 N/C$的電場中。請問(a)電偶極矩的大小？(b)電偶極方向與$\vec{E}$方向相同以及電偶極方向與$\vec{E}$方向相反的位能差？

<解>：(a) The magnitude of the dipole moment is

$$p = qd = \left(1.50\times10^{-9}\ \mathrm{C}\right)\left(6.20\times10^{-6}\ \mathrm{m}\right) = 9.30\times10^{-15}\ \mathrm{C\cdot m}.$$

(b) Following the solution to part (c) of Sample Problem 22-5, we find

$$U(180°) - U(0) = 2pE = 2\left(9.30\times10^{-15}\,\mathrm{C\cdot m}\right)\left(1100\ \mathrm{N/C}\right) = 2.05\times10^{-11}\,\mathrm{J}.$$

8th Ed【Problem 22-59】: 9th Ed【Problem 22-61】

Find an expression for the oscillation frequency of an electric dipole of dipole moment $\vec{p}$ and rotational inertia I for small amplitudes of oscillation about its equilibrium position in a uniform electric field of magnitude $\vec{E}$.

一電偶極，其電偶極矩爲 $\vec{p}$ 、轉動慣量爲 I，在一強度爲 $\vec{E}$ 的均勻電場中，進行微小振幅的震盪，請求出此電偶極之震盪頻率。

<解>: Eq. 22-35 $(\tau = -pE\sin\theta)$ captures the sense as well as the magnitude of the effect. That is, this is a restoring torque, trying to bring the tilted dipole back to its aligned equilibrium position. If the amplitude of the motion is small, we may replace sin θ with θ in radians. Thus, $\tau \approx -pE\theta$. Since this exhibits a simple negative proportionality to the angle of rotation, the dipole oscillates in simple harmonic motion, like a torsional pendulum with torsion constant $\kappa = pE$. The angular frequency ω is given by

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{I} = \frac{pE}{I}$$

where I is the rotational inertia of the dipole. The frequency of oscillation is

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}.$$