微分基本概念

&1 函數

一、函數定義：對於兩個非空集合 A、B。若 A 中每一個元素 x，在 B 中恰有一對應元素 y，我們稱此對應為 A 對應至 B 的一種函數，記號為 $f: A \to B$，其中 x 為自變量，y 為應變量。

......未完，待續！

&2 函數的極限

一、極限定義：對於函數 $f(x)$，當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 趨近於 l，則我們稱 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 的極限為 l。記法為 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ 。

【注意】所謂 x 趨近於 a，就是 $x \neq a$ ，包含有 $x > a$ 和 $x < a$ 兩種情況。

二、四則運算：若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = m$ ，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = n$ 則

(1) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)] = m + n = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - g(x)] = m - n = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to a}[c \cdot f(x)] = cm = c[\lim\limits_{x \to a} f(x)]$（其中 c 為常數）

(4) $\lim\limits_{x \to a}[f(x)g(x)] = mn = [\lim\limits_{x \to a} f(x)][\lim\limits_{x \to a} g(x)]$

(5) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$（必須$n\neq 0$時才會成立。）

三、夾擠法：假設 $\lim_{x\to a}f(x)$ 和 $\lim_{x\to a}g(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=l$

若 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，則 $\lim_{x\to a}h(x)=l$

mengwen的筆記

&3 導數

一、導數的定義：

對於函數$f(x)$與一常數a，如果$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$存在，我們稱此極限為$f(x)$在$x=a$處的導數。以$f'(a)$表示，即$f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，或$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

二、曲線上任一點之切線與法線：

在$y=f(x)$的圖形上，以$P(x,f(a))$為切點之切線的斜率為$f'(a)$。

其中，通過 P 點之切線方程式為：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

通過 P 點之法線方程式為：$y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$（當$f'(a)\neq 0$時）

$x-a=0$（當$f'(a)=0$時）

三、導函數

(1) 函數$f(x)$的導函數為$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

(2) 若函數$f(x)$在$x=a$處有導函數，則稱$f(x)$在$x=a$處可微分。

(3) 若函數$f(x)$在其定義域中之美一處均可微分則稱函數$f(x)$是可微分的函數。

(4) $f'(x)$亦可表示為$\dfrac{df(x)}{dx}$。

mengwen的筆記

&4 微分

一、有理數的微分：r為有理數，則$\dfrac{dx^r}{dx}=rx^{r-1}$。

證明：已知 $\dfrac{df(x)}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

所以 $\dfrac{dx^r}{dx}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{x^{r+a}-x^r}{a}$

二、導函數的數學運算：設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可微分的函數，則

(1) $\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\dfrac{df(x)}{dx}+\dfrac{dg(x)}{dx}=f'(x)+g'(x)$

(2) $\dfrac{d}{dx}[c\cdot f(x)]=c\cdot\dfrac{df(x)}{dx}$ （其中 c 爲常數）

(3) $\dfrac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=\dfrac{df(x)}{dx}-\dfrac{dg(x)}{dx}=f'(x)-g'(x)$

(4) $\dfrac{d}{dx}f(x)g(x)=\dfrac{df(x)}{dx}\cdot g(x)+f(x)\cdot\dfrac{dg(x)}{dx}=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

(5) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{d}{dx}[f(x)g^{-1}(x)]=\dfrac{\dfrac{df(x)}{dx}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

(6) $g(x)=[f(x)]^n \quad\Rightarrow\quad g'(x)=n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$

(7) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_0$

$\Rightarrow\quad f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots\ldots+a_1$

三、泰勒展開式

n 次多項式 $f(x)$ 可表示爲 $x-a$ 的多項式，亦即

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

稱此式爲 $f(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒展開式。

四、一些函數的微分

指數與對數的微分

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

證明：

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

證明：

三角函數的微分

$$\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta = \cos\vartheta$$

證明：已知 $\sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$ ， $\cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta &= \frac{1}{2i}\frac{d}{d\vartheta}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta})\\ &= \frac{1}{2i}(ie^{i\vartheta} + ie^{-i\vartheta})\\ &= \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}\\ &= \cos\vartheta\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\cos\vartheta = -\sin\vartheta$$

證明：已知 $\sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$ ， $\cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\vartheta}\cos\vartheta &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\vartheta}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta})\\ &= \frac{1}{2}(ie^{i\vartheta} - ie^{-i\vartheta})\\ &= -\frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}\end{aligned}$$

$$= -\sin\vartheta$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\tan\vartheta = 1+\tan^2\vartheta$$

證明：$\frac{d}{d\vartheta}\tan\vartheta = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)$

$$= \frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\cos^{-1}\vartheta)$$

$$= \left(\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)\cos^{-1}\vartheta + \sin\vartheta\left(\frac{d}{d\vartheta}\cos^{-1}\vartheta\right)$$

$$= \cos\vartheta\cos^{-1}\vartheta + \sin\vartheta\times(-1)(\cos^{-2}\vartheta)(-\sin\vartheta)$$

$$= 1+\left(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)^2 = 1+\tan^2\vartheta$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\cot\vartheta = -1-\cot^2\vartheta$$

證明：

$$\frac{d}{d\vartheta}\sec\vartheta = \tan\vartheta\sec\vartheta$$

證明：

$$\frac{d}{d\vartheta}\csc\vartheta = -\cot\vartheta\csc\vartheta$$

證明：

……未完待續！