GPN1-Q09

Problem 1

一個進行簡諧運動的物體其位置對時間的函數，$x(t)$，可以下面的三角函數來表示：

$$x(t) = a\cos(bt + c)$$

請利用這個函數當中的三個參數(a,b,c)來表示這個簡諧震盪的：角頻率、振幅、週期、頻率、速度最大值、加速度的最大值。 (06小題)

角頻率=_____ [a,b,c]

01: **ANS:=b**

振幅=_____ [a,b,c]

02: **ANS:=a**

週期=_____ [a,b,c]

03: **ANS:=(2*pi)/b**

頻率=_____ [a,b,c]

04: **ANS:=b/(2*pi)**

速度最大值=_____ [a,b,c]

05: **ANS:=a*b**

加速度的最大值=_____ [a,b,c]

06: **ANS:=a*b**2**

$$x(t) = a\cos(bt+c)$$

振幅　角頻率 (ω)　相位

角頻率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{b}$$

頻率 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{b}{2\pi}$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\underbrace{ab}_{v_{max}}\sin(bt+c)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\underbrace{ab^2}_{a_{max}}\cos(bt+c)$$

Problem 2

我們考慮下面這個簡諧震盪的系統，它的構成是一個質量=m的質點以及一個彈性係數為k的彈簧，彈簧提供彈力讓質點能夠進行簡諧震盪。根據這個系統的兩個基本物理參數(m,k)，我們可以計算物體：(07小題)

(a)震盪的角頻率=_______ [m,k]

07: **ANS:=sqrt(k/m)**

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{f}{m}=\frac{-kx}{m}$$

$$\omega^2=\frac{k}{m},\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

(b)震盪的週期=_____ [m,k]

08: **ANS:=2*pi*sqrt(m/k)**

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(c)頻率=______ [m,k]

09: **ANS:=sqrt(k/m)/(2*pi)**

$$v(t)=\dot{x}(t)=-\omega A\sin(\omega t+\phi)$$

$$a(t)=\ddot{x}(t)=-\omega^2\underbrace{A\cos(\omega t+\phi)}_{x}=\frac{-k}{m}x$$

假設初始的條件是：時間t=0的時候，這個質點的位置在A，(x(0)=A)，速度v(0)=0。請問當這個質點運動到達平衡點時其
(d)速度=______ [m,k,A]

10: **ANS:=A*sqrt(k/m)**

平衡点：$v=v_{max}=\omega A=A\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\left(\begin{array}{l}\cos(\omega t_1+\phi)=0\\ \sin(\omega t_1+\phi)=1\end{array}\right)$

(e)承上題(d)，這個質點到達座標x=-A/2，其速度|v|=_____ [m,k,A]

11: **ANS:=sqrt(3)/2*(sqrt(k/m)*A)**

(f)承上題(e)，這個質點到達座標x=-A/2，其彈性位能=_____ [m,k,A]

12: **ANS:=3/4*k*A**2**

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{-A}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{3}{8}kA^2,\quad v^2=\frac{3}{4}\frac{k}{m}A^2$$

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

(g)承上題(f)，這個質點到達座標x=-A/2，其力學能=_____ [m,k,A]

13: **ANS:=1/2*k*A**2**

Problem 3

一個單擺質量=m，利用一根繩子懸掛在一個釘子的下方，擺繩的長度=L，地球的重力場=g。(04小題)

(a)假設繩子的質量可忽略不計，則單擺擺動的週期=_____ [m,L,g]

14: ANS:=2*pi*sqrt(L/g)

(b)假設這個單擺的繩子用一個桿子來取代，桿子的質量=m且均勻分佈，

這樣的桿子在重力場下作簡諧運動，我們稱為物理擺。

這個剛體的質量中心與釘子的距離=_____ [L]

15: ANS:=3/4*L

(c)這個剛體以釘子為轉動軸的轉動慣量=______ [m,L]

16: ANS:=4/3*m*L**2

(d)請問這個物理擺的週期T=___ [m,L,g,u]

17: ANS:=2*pi*sqrt((9*g)/(8*L))

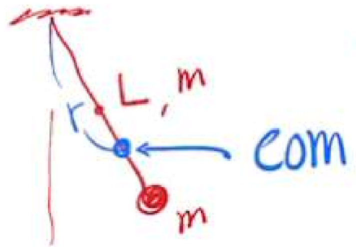
17 这个,答案的设定错误

$$T=2\pi\sqrt{\frac{8L}{9g}}$$

$$\tau = I\alpha = (mL^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -L\,mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \simeq -\frac{g}{L}\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}},\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



$$\tau = I\alpha$$

$$r=\frac{3}{4}L$$

$$\tau=(2mg)\left(\frac{3}{4}L\right)\sin\theta$$

$$=\frac{3}{2}mgL\sin\theta$$

$$I=\frac{1}{3}mL^2+mL^2$$

$$=\frac{4}{3}mL^2$$

$$\left(\frac{4}{3}mL^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{3}{2}mgL\sin\theta$$

$$\ddot{\theta}=\frac{9}{8}\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{9g}{8L}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{8L}{9g}}$$

Problem 4

一個 0.12 kg 的物體進行振幅 8.5 cm 和周期 0.20 s 的簡諧運動。 (a) 作用在它上面的最大力的大小是多少？ (b) 如果振動是由彈簧產生的，那麼彈簧常數是多少？ (02小題)

(a)最大力的大小=_______ N

18: **ANS:=<u>10</u>**

(b)彈簧常數, k=______ N/m

19: **ANS:=<u>120</u>**

$$F_{max} = m\omega^2 x_m = (0.12\ \text{kg})(10\pi\ \text{rad/s})^2(0.085\ \text{m}) = 10\ \text{N}.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega^2 = (0.12\text{kg})(10\pi\ \text{rad/s})^2 = 1.2\times10^2\ \text{N/m}.$$

Problem 5

函數 $x = 6\cos[(3\pi)t + \pi/3]$ 給出了物體的簡諧運動。 這裡 x 的單位是 m； t 是 s。 在 $t = 2.0$ s 處，運動的 (a) 加速度和 (b) 相位是多少？ 另外，簡諧運動的 (c) 週期是多少？ (03小題)

(a)acceleration, a(2)=______ m/s^2

20: **ANS:=-270**

(b)phase of the motion, ϕ=_____ rad

21: **ANS:=20**

(c)period, T=_______ s

22: **ANS:=0.67**

$X(t) = 6\cos[3\pi t + \frac{\pi}{3}]$, $\omega = 3\pi$

$a = -\omega^2 x = -(3\pi)^2\, 6\cos[6\pi + \frac{\pi}{3}]$

$= -27\pi^2 = -266.5$

$\phi = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 19.90$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} = 0.667$

Problem 6

一個進行簡諧運動的物體需要 0.25 秒才能從一個零速度點行進到下一個這樣的點。 這些點之間的距離是 36 cm。 計算運動的 (a) 週期、(b) 頻率和 (c) 幅度。 (03小題)

(a)period, T=______ s

23: **ANS:=<u>0.5</u>**

(b)frequency, f=_____ Hz

24: **ANS:=<u>2</u>**

(c)amplitude, x_m=_____ m

25: **ANS:=<u>0.18</u>**

$2A = 0.36$, $A = 0.18$

$\frac{T}{2} = 0.25$, $T = 0.5$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5} = 2$

Problem 7

振盪器由連接到彈簧的質量為 0.500 kg 的質量塊組成。 設定振盪器的振幅為 35.0 cm 振盪時，振盪器每 0.500 秒重複一次運動。 求 (a) 角頻率、(b) 彈簧常數、(c) 最大速度。 (03小題)

(a) angular frequency, ω=______ rad/s

26: **ANS:=12.6**

(b) spring constant, k=______ M/m

27: **ANS:=79.0**

(c) maximum speed, v_m=_______ m/s

28: **ANS:=4.4**

$m = 0.5$

$A = 0.35$

$T = 0.5 \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$

$= 12.57$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$k = m\omega^2 = 0.5 \times 16\pi^2 = 78.96$

$v_m = \omega A = 0.35 \times 12.57 = 4.40$

Problem 8

考慮一個彈簧與物體形成的簡諧振盪系統，彈簧的彈性係數為k，物體的質量為m物體震動的角頻率為w，振幅為A，當物體位置為A/2的時候(假設以平衡點的位置為座標的原點)，計算此時的(a)動能，(b)位能和(c)物體的速率。 (03小題)

(a)動能=______ [w,A,m,k]

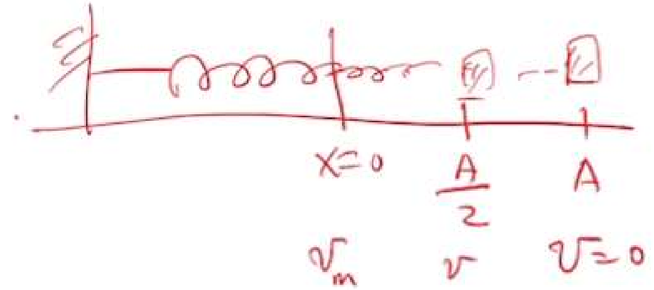
29: **ANS:=3*m*w**2*A**2/8**

(b)位能=_______ [w,A,m,k]

30: **ANS:=m*w**2*A**2/8**

(c)物體的速率=________ [w,A,m,k]

31: **ANS:=sqrt(3)*w*A/2**



$$E = U_0 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = \omega^2 m$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}kA^2$$

$$= \frac{3}{8}(\cancel{m}\omega^2)A^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega A$$

這題送分，題目原意是以m,ω,A作答（k不是已知的變數）

$$U = E - K = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 - \frac{3}{8}m\omega^2A^2$$

$$= \frac{1}{8}m\omega^2A^2$$

Problem 9

有一個長度為0.8公尺質量均勻分佈的棒子，將其一端將固定於一個可自由轉動的釘子上，棒子的質量為0.5 kg，請計算這個棒子進行物理擺的簡諧運動時週期。 (01小題)

T=______ s

32: **ANS:=<u>1.466</u>**

$$F = ma = -(m\omega^2)x.$$

$$F = -kx,$$

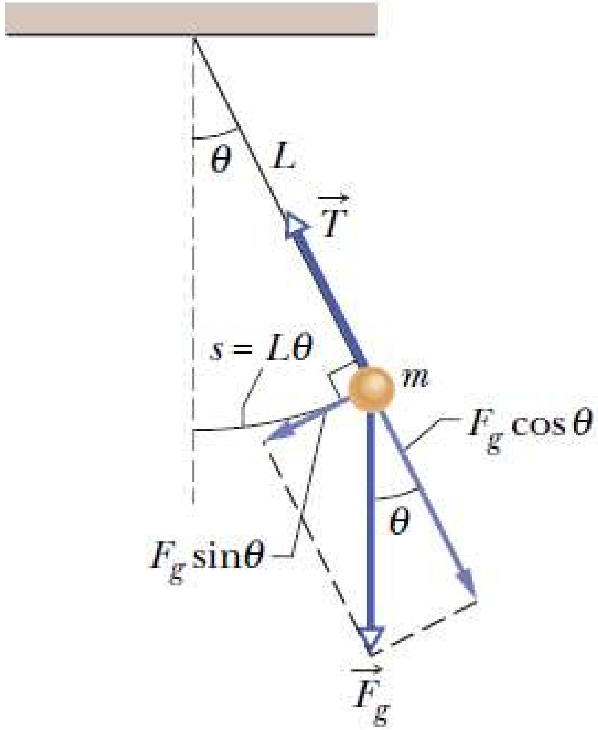
$$k = m\omega^2.$$

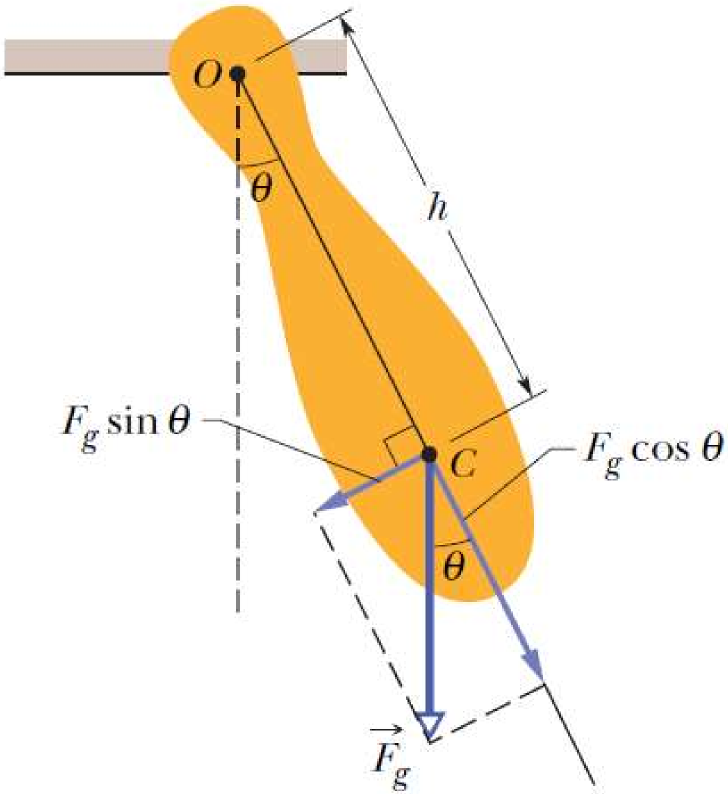
$$\tau = -L(F_g \sin\theta),$$

$$-L(mg\sin\theta) = I\alpha,$$

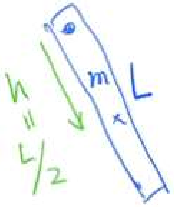
$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}.$$





$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}}$$



$$I = \frac{1}{3}mL^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cancel{m}L^2}{\cancel{m}g(\frac{L}{2})}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2(0.8)}{3(9.8)}}$$

$$= 1.466\ (s)$$