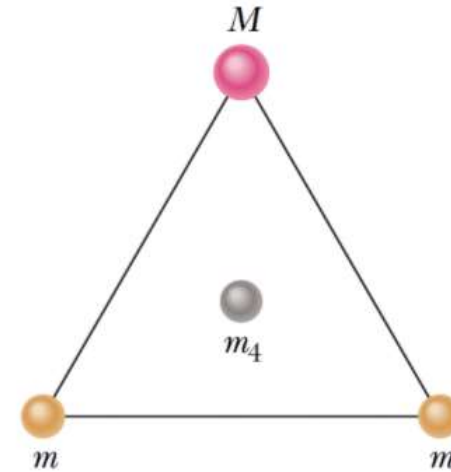




### Problem 1

As seen in the figure, two spheres of mass  $m$  and a third sphere of mass  $M$  form an equilateral triangle, and a fourth sphere of mass  $m_4$  is at the center of the triangle. The net gravitational force on that central sphere from the three other spheres is zero. (a) What is  $M$  in terms of  $m$ ? (b) If we double the value of  $m_4$ , what then is the magnitude of the net gravitational force on the central sphere?

如圖所示，質量為 $m$ 的兩個球體和質量為 $M$ 的第三球體形成等邊三角形，質量為 $m_4$ 的第四球體在三角形的中心。來自其他三個球對中心球的淨重力為零。(a) $M = \underline{\quad} m$ ? (b)如果將 $m_4$ 的值加倍，那麼中心球上的淨重力的大小是多少？(02小題)



(a)  $M = \underline{\quad} m$

**01: ANS: = 1.0**

$$r = \ell / 2 \cos 30^\circ = \ell / \sqrt{3}$$

(b)  $F = \underline{\quad}$

**02: ANS: = 0**

$$2F_y = 2 \left( \frac{Gm_4m}{r^2} \right) \sin 30^\circ = 3 \frac{Gm_4m}{\ell^2}$$

$$3 \frac{Gm_4m}{\ell^2} = \frac{Gm_4M}{(\ell/\sqrt{3})^2}$$

$$m = M.$$

在公式兩端的 $m_4$ 質量都消去了，因此與中央質點的質量無關，合力仍然為零。

## Problem 2

(a) What will an object weigh on the Moon's surface if it weighs 100 N on Earth's surface? (b) How many Earth radii must this same object be from the center of Earth if it is to weigh the same as it does on the Moon?

(a)如果一個物體在地球表面的重量為100 N，它在月球表面上重量將是？ (b)如果同一物體受地球的重力與在月球的重量相同，那麼該物體必須距地球中心多少個地球半徑？ (02小題)

---

(a)  $W = \underline{\hspace{2cm}}$  N

**03: ANS: = 17**

(b) how many radii?  $r = \underline{\hspace{2cm}}$   $R_E$

**04: ANS: = 2.4**

(a) The gravitational acceleration at the surface of the Moon is  $g_{\text{moon}} = 1.67 \text{ m/s}^2$  (see Appendix C). The ratio of weights (for a given mass) is the ratio of  $g$ -values, so

$$W_{\text{moon}} = (100 \text{ N})(1.67/9.8) = 17 \text{ N}.$$

(b) For the force on that object caused by Earth's gravity to equal 17 N, then the free-fall acceleration at its location must be  $a_g = 1.67 \text{ m/s}^2$ . Thus,

$$a_g = \frac{Gm_E}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{Gm_E}{a_g}} = 1.5 \times 10^7 \text{ m}$$

so the object would need to be a distance of  $r/R_E = 2.4$  “radii” from Earth's center.

## Problem 2

One model for a certain planet has a core of radius  $R$  and mass  $M$  surrounded by an outer shell of inner radius  $R$ , outer radius  $2R$ , and mass  $4M$ . If  $M = 4.1 \times 10^{24}$  kg and  $R = 6.0 \times 10^6$  m, what is the gravitational acceleration of a particle at points (a)  $R$  and (b)  $3R$  from the center of the planet?

某個行星的一個模型具有一個半徑 $R$ 和質量 $M$ 的核，並被一個內部半徑 $R$ ，外部半徑 $2R$ 和質量 $4M$ 的外殼包圍。如果 $M = 4.1 \times 10^{24}$  kg和 $R = 6.0 \times 10^6$  m，則粒子在距離行星中心(a) $R$ 和(b) $3R$ 點處的重力加速度是多少？(02小題)

---

(a)  $a_g = \underline{\hspace{2cm}}$  m/s<sup>2</sup>

**05: ANS:=7.6**

(b)  $a_g = \underline{\hspace{2cm}}$  m/s<sup>2</sup>

**06: ANS:=4.2**

(a) The gravitational acceleration is  $a_g = \frac{GM}{R^2} = 7.6 \text{ m/s}^2$ .

(b) Note that the total mass is  $5M$ . Thus,  $a_g = \frac{G(5M)}{(3R)^2} = 4.2 \text{ m/s}^2$ .



## Problem 2

Certain neutron stars (extremely dense stars) are believed to be rotating at about 1 rev/s. If such a star has a radius of 20 km, what must be its minimum mass so that material on its surface remains in place during the rapid rotation?

據信某些中子星（極緻密星）的自轉速度約為1轉/秒。如果此類星體的半徑為20 km，那麼它的最小質量必須是多少，以便在快速旋轉過程中其表面上的物質可停留在表位？(01小題)

---

$$M_{min} = \text{_____ kg}$$

**07: ANS: = 4.7E24**

Solution:

From Eq. 13-14, we see the extreme case is when “ $g$ ” becomes zero, and plugging in Eq. 13-15 leads to

$$0 = \frac{GM}{R^2} - R\omega^2 \Rightarrow M = \frac{R^3\omega^2}{G}.$$

Thus, with  $R = 20000$  m and  $\omega = 2\pi$  rad/s, we find  $M = 4.7 \times 10^{24}$  kg  $\approx 5 \times 10^{24}$  kg.

## Problem 2

Left over from the big-bang beginning of the universe, tiny black holes might still wander through the universe. If one with a mass of  $1 \times 10^{11}$  kg (and a radius of only  $1 \times 10^{-16}$  m) reached Earth, at what distance from your head would its gravitational pull on you match that of Earth's? Treat your body as a point particle.

從宇宙大爆炸的開始遺留下來的，微小的黑洞可能仍然在宇宙中徘徊。如果一個質量為  $1 \times 10^{11}$  kg (半徑僅為  $1 \times 10^{-16}$  m) 的黑洞到達地球，它的引力在距您的頭部多少距離的地方拉你的力量與地球的重力相等？將你的身體視為一個質點。(01小題)

---

mini black hole's distance from your head=\_\_\_\_\_ m

**08: ANS: = 0.8** The gravitational force from Earth on you (with mass  $m$ ) is

$$F_g = \frac{GM_E m}{R_E^2} = mg$$

where  $g = GM_E / R_E^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$ . If  $r$  is the distance between you and a tiny black hole of mass  $M_b = 1 \times 10^{11}$  kg that has the same gravitational pull on you as the Earth, then

$$F_g = \frac{GM_b m}{r^2} = mg.$$

Combining the two equations, we obtain

$$mg = \frac{GM_E m}{R_E^2} = \frac{GM_b m}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{GM_b}{g}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2)(1 \times 10^{11} \text{ kg})}{9.8 \text{ m/s}^2}} \approx 0.8 \text{ m}.$$

### Problem 3

The mean diameters of Mars and Earth are  $6.9 \times 10^3$  km and  $1.3 \times 10^4$  km, respectively. The mass of Mars is 0.11 times Earth's mass. (a) What is the ratio of the mean density (mass per unit volume) of Mars to that of Earth? (b) What is the value of the gravitational acceleration on Mars? (c) What is the escape speed on Mars?

火星和地球的平均直徑分別為  $6.9 \times 10^3$  km 和  $1.3 \times 10^4$  km。火星的質量是地球質量的 0.11 倍。(a) 火星與地球的平均密度 (單位體積質量) 之比是多少? (b) 火星上的重力加速度值是多少? (c) 火星上的逃逸速度是多少? (03 小題)

(a)  $\frac{\rho_{Mars}}{\rho_{Earth}} = \underline{\hspace{2cm}}$

**09: ANS:=0.74**

$$\rho = 3M/4\pi R^3, \quad \frac{\rho_M}{\rho_E} = \frac{M_M}{M_E} \frac{R_E^3}{R_M^3} = 0.11 \left( \frac{0.65 \times 10^4 \text{ km}}{3.45 \times 10^3 \text{ km}} \right)^3 = 0.74.$$

(b)  $g_{Mars} = \underline{\hspace{2cm}}$  m/s<sup>2</sup>

**10: ANS:=3.8**

(c)  $v_{esc, Mars} = \underline{\hspace{2cm}}$  m/s

$$a_g = GM/R^2, \quad a_g M = \frac{M_M}{M_E} \frac{R_E^2}{R_M^2} a_{gE} = 0.11 \left( \frac{0.65 \times 10^4 \text{ km}}{3.45 \times 10^3 \text{ km}} \right)^2 (9.8 \text{ m/s}^2) = 3.8 \text{ m/s}^2.$$

**11: ANS:=5000**

$$v \text{ is the escape speed, } \frac{1}{2}mv^2 = G \frac{mM}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

$$v = \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \cdot \text{kg})(0.11)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{3.45 \times 10^6 \text{ m}}} = 5.0 \times 10^3 \text{ m/s}.$$



#### Problem 4

A projectile is shot directly away from Earth's surface. Neglect the rotation of Earth. What multiple of Earth's radius  $R_E$  gives the radial distance a projectile reaches if (a) its initial speed is 0.500 of the escape speed from Earth and (b) its initial kinetic energy is 0.500 of the kinetic energy required to escape Earth?

一拋體直接從地球表面射出。忽略地球的自轉。如果(a)初始速度是從地球脫離速度的0.5，則拋體到達的徑向距離是地球半徑 $R_E$ 的倍數。(b) 初始動能是脫離地球所需動能的0.5，則拋體到達的徑向距離是地球半徑 $R_E$ 的倍數。(02小題)

---

(a) the distance it reaches,  $r = \underline{\hspace{1cm}} R_E$

**12: ANS: = 1.333**

(b) the distance it reaches,  $r = \underline{\hspace{1cm}} R_E$

**13: ANS: = 2**

(a) From Eq. 13-28, we see that  $v_0 = \sqrt{GM/2R_E}$  in this problem. Using energy conservation, we have

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - GMm/R_E = -GMm/r$$

which yields  $r = 4R_E/3$ . So the multiple of  $R_E$  is 4/3 or 1.33.

(b) Using the equation in the textbook immediately preceding Eq. 13-28, we see that in this problem we have  $K_i = GMm/2R_E$ , and the above manipulation (using energy conservation) in this case leads to  $r = 2R_E$ . So the multiple of  $R_E$  is 2.00.

### Problem 5

The Martian satellite Phobos travels in an approximately circular orbit of radius  $9.4 \times 10^6$  m with a period of 7 h 39 min. Calculate the mass of Mars from this information.

火星衛星火衛一在半徑為  $9.4 \times 10^6$  m 的近似圓形軌道中移動，週期為 7 h 39 min。根據這些信息計算火星的質量。(01小題)

mass of Mars = \_\_\_\_\_ kg

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

**14: ANS: = 6.5E23**

Solution:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (9.4 \times 10^6)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(2.754 \times 10^4)^2} = 6.5 \times 10^{23}$$

The Sun, which is  $2.2 \times 10^{20}$  m from the center of the Milky Way galaxy, revolves around that center once every  $2.5 \times 10^8$  years. Assuming each star in the Galaxy has a mass equal to the Sun's mass of  $2.0 \times 10^{30}$  kg, the stars are distributed uniformly in a sphere about the galactic center, and the Sun is at the edge of that sphere, estimate the number of stars in the Galaxy.

太陽距銀河系中心  $2.2 \times 10^{20}$  m，每  $2.5 \times 10^8$  年圍繞該中心旋轉一次。假設銀河系中的每顆恆星的質量等於太陽的質量  $2.0 \times 10^{30}$  kg，這些恆星均勻分佈在銀河系中心周圍的一個球體中，並且太陽位於該恆星球體的邊緣，請估計銀河系中的恆星數。(01小題)

the number of stars in the Galaxy = \_\_\_\_\_

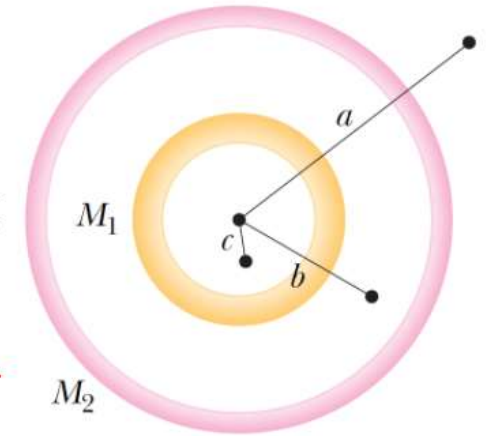
**15: ANS: = 5.1E10**



### Problem 6

Two concentric spherical shells with uniformly distributed masses  $M_1=M_1$  and  $M_2=M_2$  are situated as shown in the figure. Find the magnitude of the net gravitational force on a particle of mass  $m$ , due to the shells, when the particle is located at radial distance (a)  $a$ , (b)  $b$ , and (c)  $c$ .

如圖所示，放置了兩個質量均勻分佈的同心球殼 $M_1=M_1$ 和 $M_2=M_2$ 。當質點位於徑向距離(a) $a$ ，(b) $b$ 和(c) $c$ 時，由於殼的作用，求出質量為 $m$ 的質點上的淨重力的大小。(03小題)



(a)  $r = a, F_g =$  \_\_\_\_\_  $[M_1, M_2, m, a, b, c, G]$

**16: ANS:=(G\*(M\_1+M\_2)\*m)/a\*\*2**

(a)  $r = b, F_g =$  \_\_\_\_\_  $[M_1, M_2, m, a, b, c, G]$

**17: ANS:=(G\*M\_1\*m)/b\*\*2**

(a)  $r = c, F_g =$  \_\_\_\_\_  $[M_1, M_2, m, a, b, c, G]$

**18: ANS:=0**

A 19 可嘗試次數=1 分數=2 行星運動時，在近日點的速度？(A)較快 (B)較慢 (C)不變

Solution:

根據克卜勒的行星運動第二定律，等面積定律：在相同的時間之內，行星到太陽之間的連心線會掃過相同的面積，因此在近日點附近，由於連心線的距離較短，要掃出相同的面積比然會有比較長的弧長，因此在相同的時間之內，行星要運動過較長的弧長，表示在這段時間內運行的速度較快，也就是行星在軌道運動時，在近日點附近運動的速度較快。

D 20 可嘗試次數=1 分數=2 哈雷彗星繞日為何種軌道？(A)拋物線 (B)雙曲線 (C)圓曲線 (D)橢圓曲線 (E)雙螺旋曲線

C 21 可嘗試次數=1 分數=2 請問下列哪一個地點的重力加速度最大？假設地球的半徑為R。(A)距離地心0.25R處 (B)距離地心0.5R處 (C)地表(距離地心R處) (D)距離地心1.5R處 (E)距離地心2R處 (F)距離地心0.1R處

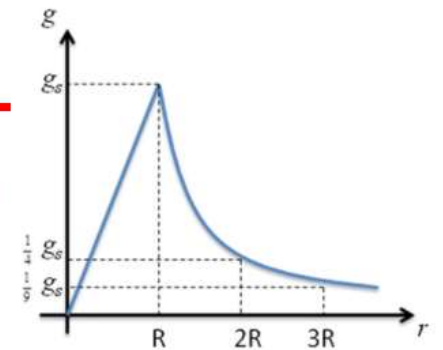
Solution:

重力加速度隨著遠離地心的距離，其函數變化行為如圖所顯示，在地球內部是線性增加，出了地表之後就是平方反比定律。

G 22 可嘗試次數=1 分數=2 請問下列哪一個地點的重力加速度最小？假設地球的半徑為R。(A)距離地心0.25R處 (B)距離地心0.5R處 (C)地表(距離地心R處) (D)距離地心1.5R處 (E)距離地心2R處 (F)距離地心0.1R處 (G)地心

Solution:

在地心由於對稱，所有的質量在地心處的吸引力都互相彼此相消，因此在地心的重力=0，也就是在地心的重力加速度為零。



重力加速度隨著遠離地心的距離之函數行為。在地球內部是線性增加，出了地表之後就是平方反比定律。

D 23 可嘗試次數=1 分數=2 地球的重力加速度與下列何項性質有關？(A)地球的磁場 (B)地球的質量與地球公轉的半徑 (C)地球半徑與地自轉的週期 (D)地球的質量與地球的半徑 (E)地球公轉的周期與公轉的半徑

Solution:

$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ ,  $g$ 與地球的質量( $M_E$ )與地球的半徑( $R_E$ )有關。



D 24 可嘗試次數=1 分數=2 如果地球的半徑縮小為原來的一半，但地球的質量不改變，則地球的重力加速度將為？(m/s<sup>2</sup>)  
 (A)9.8 (B)4.9 (C)2.45 (D)39.2 (E)19.6

Solution:

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}, g \text{ 與 } R_E \text{ 的平方反比。}$$

B 25 可嘗試次數=1 分數=2 自下列星體表面脫離，何者的脫離速度最大？(A)恆星 (B)白矮星 (C)行星 (D)衛星

E 26 可嘗試次數=1 分數=2 下列哪一個星體的脫離速度為光速的2/3？(A)小行星 (B)行星 (C)太陽 (D)白矮星 (E)中子星 (F)黑矮星 (G)黑洞

Solution:

A 27 可嘗試次數=1 分數=2 中子星的半徑約為多少公里？(A)10 (B)0.2 (C)400 (D)2000 (E)6000 (F)20000

Solution:

中子星是恆星演化到末期，經由重力坍縮發生超新星爆炸之後，可能成為的少數終點之一。恆星在核心的氫、氦、碳等元素於核融合反應中耗盡，當它們最終轉變成鐵元素時便無法從核融合中獲得能量。失去熱輻射壓力支撐的外圍物質受重力牽引會急速向核心墜落，有可能導致外殼的動能轉化為熱能向外爆發產生超新星爆炸，或者根據恆星質量的不同，恆星的內部區域被壓縮成白矮星、中子星或黑洞。白矮星被壓縮成中子星的過程中恆星遭受劇烈的壓縮使其組成物質中的電子併入質子轉化成中子，直徑大約只有十餘公里，且旋轉速度極快。由於其磁軸和自轉軸並不重合，磁場旋轉時所產生的無線電波等各種輻射可能會以一明一滅的方式傳到地球，有如人眨眼，此時稱作脈衝星。一顆典型的中子星質量介於太陽質量的1.35到2.1倍，半徑則在10至20公里之間。

由於受到一個星體的質量所造成的重力吸引，任何物體要從星體的表面脫離，都需要一個足夠大的初速度才能夠逃脫這個星體的重力場。逃脫需要達到的最小速度稱為脫離速度。

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

脫離速度的大小也是由這個星體的質量和星體的半徑所決定。

| 天體       | 質量(kg)                | 半徑(m)                | 脫離速度(km/s)        |
|----------|-----------------------|----------------------|-------------------|
| 小行星      | 1.17x10 <sup>21</sup> | 3.8x10 <sup>6</sup>  | 0.64              |
| 月球       | 7.36x10 <sup>22</sup> | 1.74x10 <sup>6</sup> | 2.38              |
| 地球       | 5.98x10 <sup>24</sup> | 6.37x10 <sup>6</sup> | 11.2              |
| 木星       | 1.90x10 <sup>27</sup> | 7.15x10 <sup>7</sup> | 59.5              |
| 太陽       | 1.99x10 <sup>30</sup> | 6.96x10 <sup>8</sup> | 618               |
| 天鵝座(白矮星) | 2x10 <sup>28</sup>    | 1x10 <sup>7</sup>    | 5200              |
| 中子星      | 2x10 <sup>30</sup>    | 1x10 <sup>4</sup>    | 2x10 <sup>5</sup> |

光速= 3x10<sup>8</sup> km/s



\_\_C\_\_ 28 可嘗試次數=1 分數=2 中子星的質量約為太陽的若干倍? (A)0.01 (B)0.1 (C)1 (D)10 (E)100 (F)1000

Solution:

中子星是恆星演化到末期，經由重力坍縮發生超新星爆炸之後，可能成為的少數終點之一。恆星在核心的氫、氦、碳等元素於核融合反應中耗盡，當它們最終轉變成鐵元素時便無法從核融合中獲得能量。失去熱輻射壓力支撐的外圍物質受重力牽引會急速向核心墜落，有可能導致外殼的動能轉化為熱能向外爆發產生超新星爆炸，或者根據恆星質量的不同，恆星的內部區域被壓縮成白矮星、中子星或黑洞。白矮星被壓縮成中子星的过程中恆星遭受劇烈的壓縮使其組成物質中的電子併入質子轉化成中子，直徑大約只有十餘公里，且旋轉速度極快。由於其磁軸和自轉軸並不重合，磁場旋轉時所產生的無線電波等各種輻射可能會以一明一滅的方式傳到地球，有如人眨眼，此時稱作脈衝星。一顆典型的中子星質量介於太陽質量的1.35到2.1倍，半徑則在10至20公里之間。

\_\_C\_\_ 29 可嘗試次數=1 分數=2 我們的太陽50億年後，也將變為一個\_\_? (A)小行星 (B)行星 (C)白矮星 (D)中子星 (E)黑矮星 (F)黑洞

\_\_E\_\_ 30 可嘗試次數=1 分數=2 核融合反應是把氫融合成氦並釋放出巨大的能量，請問能量的計算需用到下列哪一個公式? (A)  $W = FS$  (B)  $K = 1/2mv^2$  (C)  $F = ma$  (D)  $V = IR$  (E)  $E = mC^2$

Solution:

當兩個氫原子以非常高的速度彼此靠近，當原子核接觸時會發生融合的現象，融合後得到氦原子。氦原子的質量比碰撞前兩個氫原子的質量還小，失去的質量轉換成為能量，其中運用到的公式，就是愛因斯坦在狹義相對論著名的質能互換公式，

$$E = mC^2$$



D 31 可嘗試次數=1 分數=2 我們骨骼中的鈣原子及呼吸的氧原子是從何而來? (A) 星際之間的雲氣的化學反應 (B) 彗星撞地球時產生 (C) 宇宙大爆炸時就存在 (D) 恆星內部的核融合反應 (E) 黑洞的內部所製造 (F) 行星的內部高溫高壓下所製造

Solution:

在氫原子融合完之後，恆星內部持續進行核融合反應融合出更多高原子序的原子，我們呼吸的氧原子和骨骼中的鈣原子，都是在恆星內部的核融合反應所造就出來。而巨大質量的恆星，在恆星的晚年核融合反應即將熄火的時侯，會發生超新星爆炸。這些高原子序的原子在超新星爆炸的過程當中，又重新的被拋射到外太空，經過長久的歲月之後這些原子又藉由重力重新凝聚，最後才又再形成新一代的恆星系統，前一代恆星所融合的高原子序的原子就已經存在於新一代的恆星系統之中，我們的太陽系就是這樣一個典型的例子。我們在地球上呼吸，生活所需要的所有物資，都是在前一代的恆星為我們所融合，並且經由超新星爆炸之後才能夠為我們所用。

A 32 可嘗試次數=1 分數=2 下列哪一種基本作用力使散布於太空中的氣體凝聚為星系? (A)重力 (B)電力 (C)磁力 (D)強作用力 (E)弱作用力

Solution:

在我們的大自然中有四個基本的交互作用，所謂基本的交互作用就是自然存在於物質間的交互作用。質量與質量之間存在重力，電荷與電荷之間存在電力，在原子核內存在強交互作用力和弱交互作用力。強交互作用力將夸克束縛在質子和中子的內部，也形成了質子與中子在原子核內部結合的力量，弱交互作用力促使巨大的原子核發生蛻變的現象。在星際間的物質就是藉著物質間的彼此的質量所形成的重力，相互靠近最後形成星球系統。

C 33 可嘗試次數=1 分數=2  $r$ 代表太陽到行星的距離， $T$ 代表行星繞日運動的週期，那麼下列哪一個公式在描述克普勒的行星運動第三定律? (A) $T \propto r$  (B) $T^2 \propto r$  (C) $T^2 \propto r^3$  (D) $T^3 \propto r^2$  (E) $T \propto r^3$  (F) $T \propto r^2$