

N維單位球體體積

2024年9月15日

此對話可能會透露建立者的個人化資料，這些資料並不會與他人共享，並且可能大幅影響模型的回應方式。

請推導N維空間單位球體的體積公式



在 N 維空間中，單位球體的體積可以透過積分推導。具體公式如下：

$$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}$$

其中， $\Gamma(z)$ 是伽瑪函數，它是階乘函數的延拓：對於正整數 n ， $\Gamma(n) = (n-1)!$ 。

推導步驟：

1. 球的體積定義：我們考慮 N 維單位球的體積 V_N ，它是所有滿足

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \leq 1$$

的點組成的區域。這可以轉換為積分形式，考慮在球坐標系中的體積元進行積分。

2. 轉換為球坐標系：

在 N 維空間中，我們使用球坐標，將體積元表示為：

$$dV = r^{N-1} \sin^{N-2} \theta_1 \sin^{N-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{N-1} dr$$

其中 r 是徑向距離， $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}$ 是角坐標。

3. 徑向積分：

徑向積分 r 的範圍是從 0 到 1，因此積分的徑向部分為：

$$\int_0^1 r^{N-1} dr = \frac{1}{N}$$

開始使用 ChatGPT