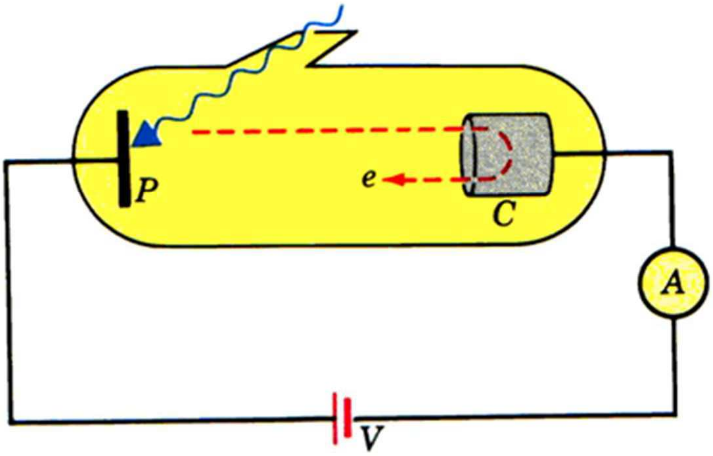
古典物理面對的挑戰 II：光電效應

當光照射在金屬上時可以打出電子，這個現象被稱為光電效應 (photoelectric effect)。

被打出的電子稱為光電子 (photoelectron)



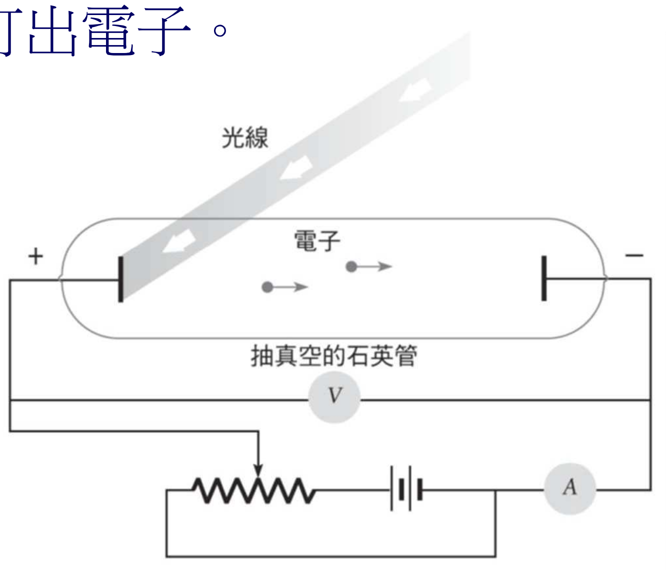
V_{stop}：截止電位

截止電位的存在說明光電子具有初動能

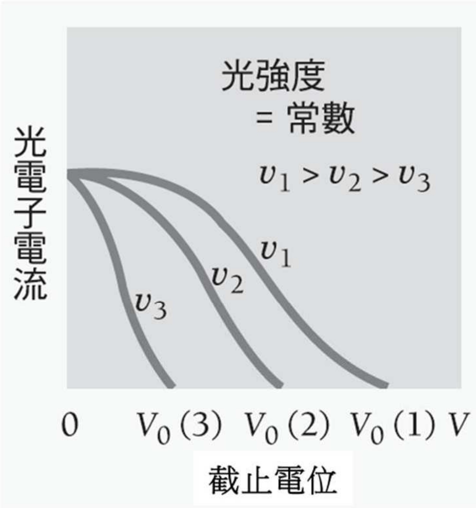
$$eV_{stop} = KE_{max}$$

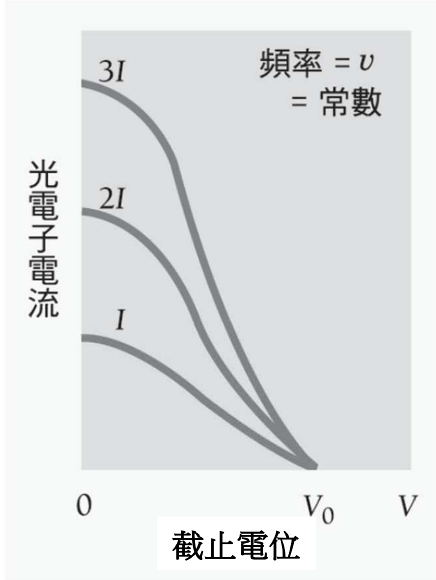
古典電磁理論預測的三個結果

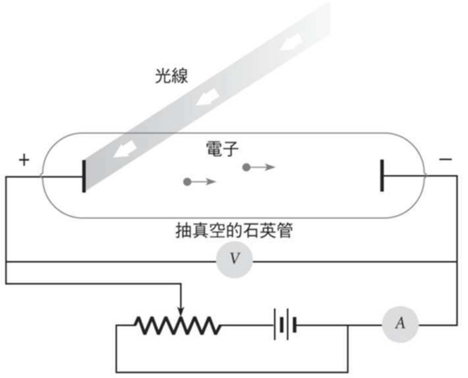
- 入射光的強度越大，則電子之動能越大，因此截止電位也越大。
- 無論入射光的頻率為何，只要強度夠大，一定可以打出電子。
- 只要時間足夠一定能打出電子。



光電效應的實驗結果



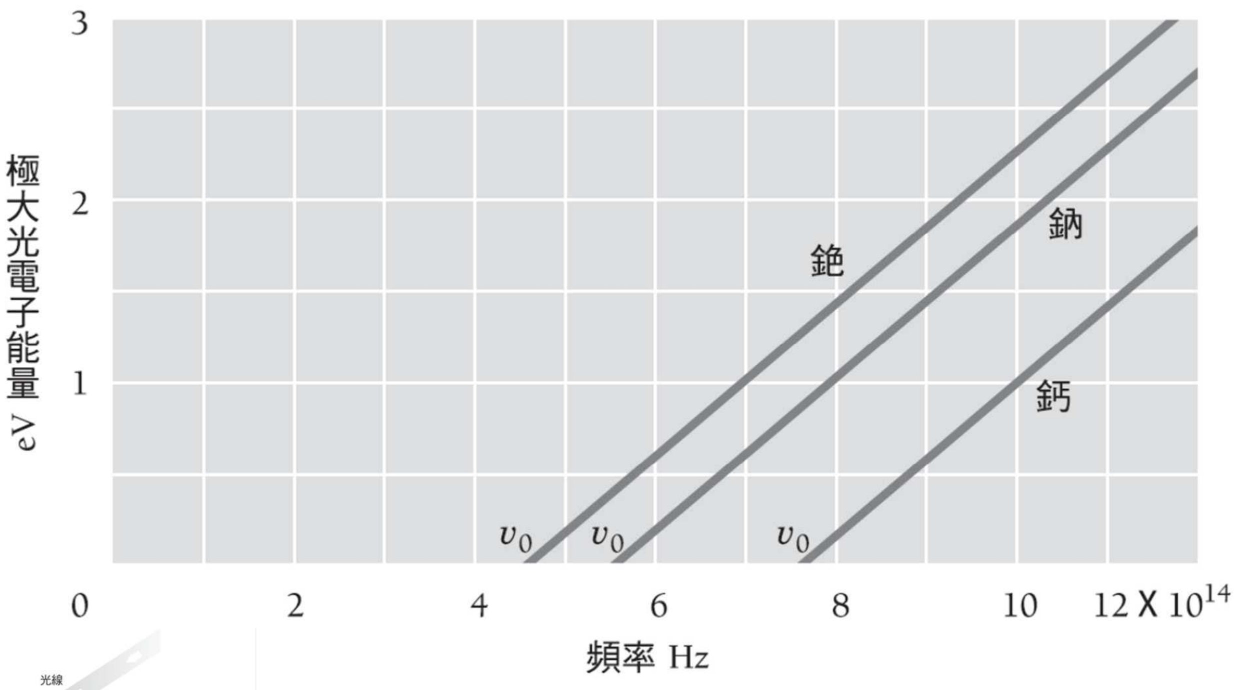


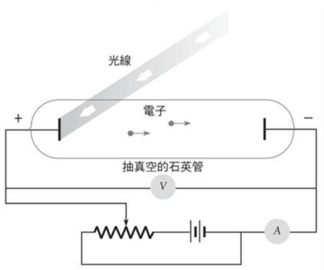


入射光頻率一定，飽和光電流與入射光强成正比，但截止電位不變

- **截止電位 (或 KE_{max})** 與入射光的頻率成正比，而與強度無關。

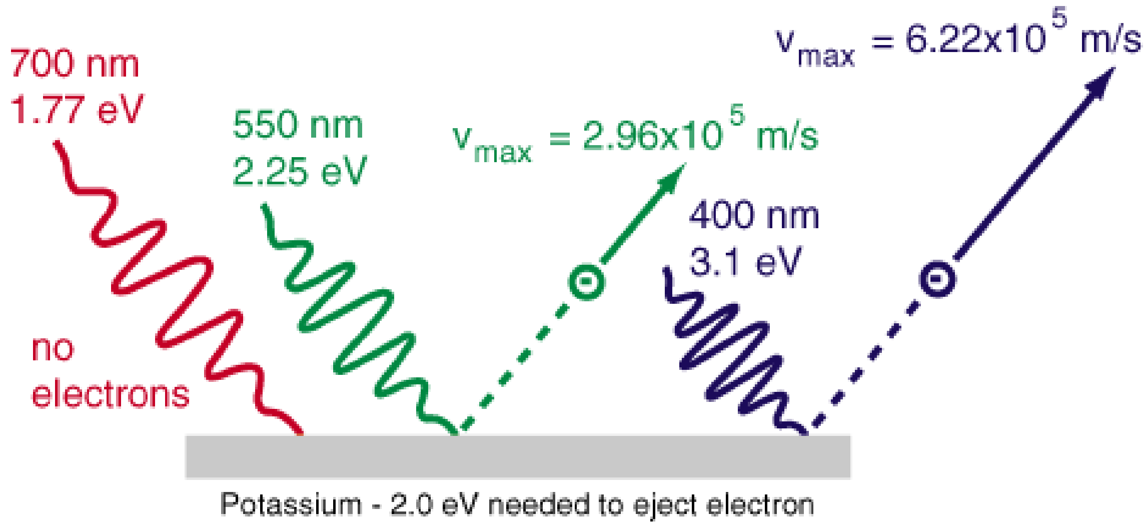
$eV_{stop} = KE_{max}$





存在底限頻率 ν_0 ！

- 入射光的頻率若小於**底限頻率**，則無論光強度多大，仍然沒有光電流產生。



- 只要能打出電子，則瞬間便可以打出，沒有延遲效應。

1905年Albert Einstein的光子（photon）理論

光子的能量和動量分別與頻率和波長的關係為：

$E = h\,\nu$

$P = E / c = h\,\nu / c = h / \lambda$

$h = 6.626\times10^{-34}$ J· S

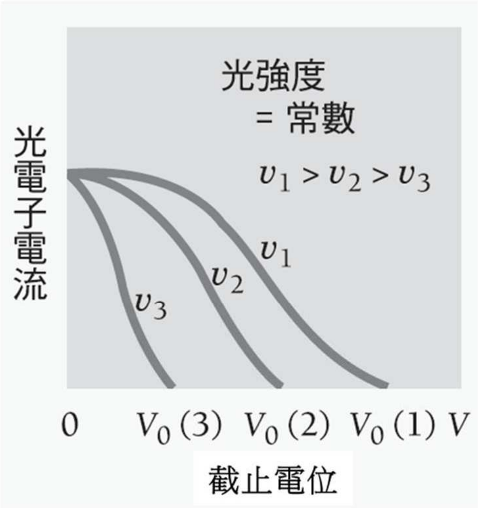
Planck 常數

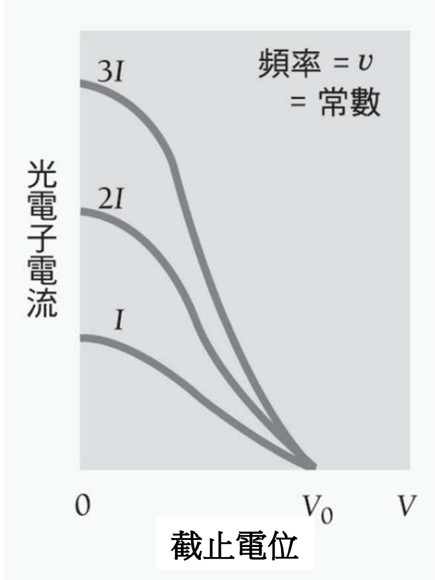
光强度即為光的能流密度

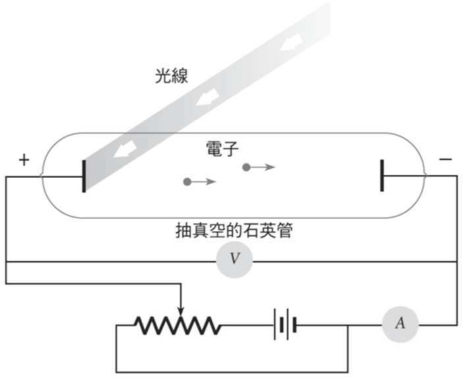
$\mathbf{I = N\,h\,\nu}$

N：單位時間通過垂直於單位面積的光子個數

光電效應的實驗結果







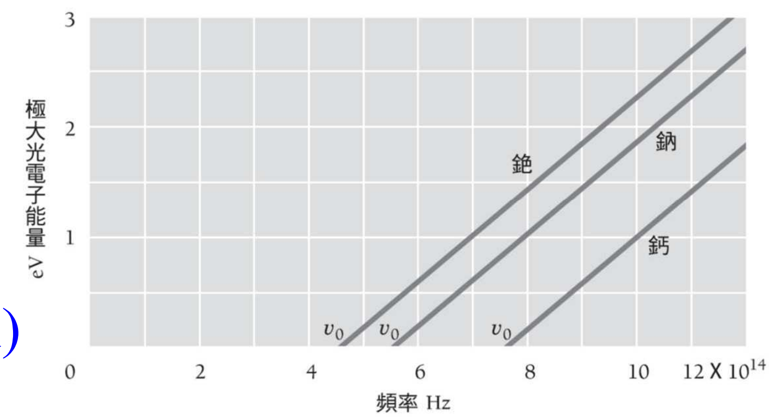
入射光頻率一定 (光子的能量一定)，飽和光電流與入射光强 (光子的個數)成正比，但截止電位不變

當光照射到金屬陰極上時，能量為 hν的光子被電子吸收，電子把這份能量一部分用來克服金屬表面對它的吸引力作功，另一部分就轉化為光電子攜帶的動能。

Einstein光電方程式

$$h\nu - \phi = KE_{max}$$

ϕ：功函數(work function)



斜率即為 h！

愛因斯坦光子理論對光電效應的解釋

1) 電子只要吸收一個光子就可以從金屬表面逸出，所以無須時間的累積過程。

2) 光強度大，光子數多，釋放的光電子也多，所以飽和光電流也大。

3) 從方程式可以看出光電子初動能和照射光的頻率成綫性關係。

$$\boxed{KE_{max} = h\nu - \phi}$$

4)從光電效應方程中，當初動能爲零時，可得到底限頻率：

$$\boxed{\nu_0 = \frac{\phi}{h}}$$

光電效應現象在日常生活中已有了廣泛的應用

以電子伏特來表示，光子能量公式 $E = h\nu$ 變成

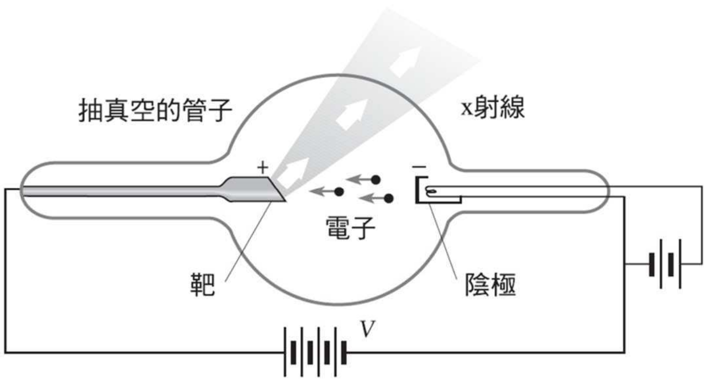
光子能量 $$E = \left(\frac{6.626\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{1.602\times10^{-19}\ \text{J/eV}}\right)\nu = (4.136\times10^{-15})\nu\ \text{eV}\cdot\text{s} \quad (2.10)$$

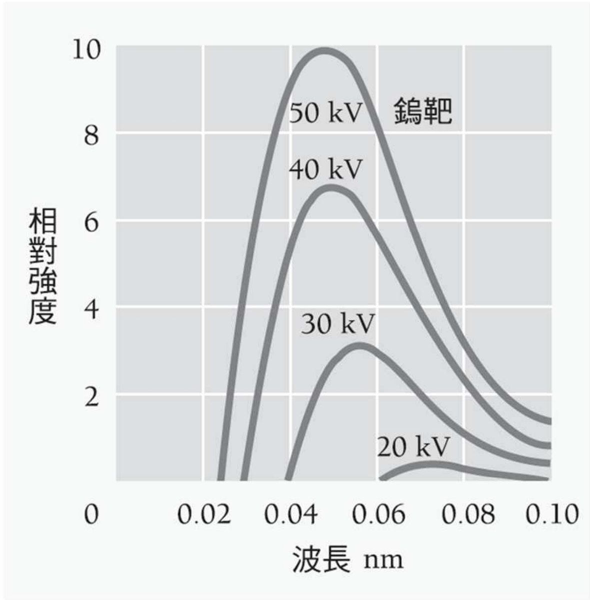
如果我們以光的波長 λ 來表示時，因為 $\nu = c/\lambda$，我們得到

光子能量 $$E = \frac{(4.136\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{\lambda} = \frac{1.240\times10^{-6}\ \text{eV}\cdot\text{m}}{\lambda} \quad (2.11)$$

金屬	符號	功函數（電子伏特）
銫	Cs	1.9
鉀	K	2.2
鈉	Na	2.3
鋰	Li	2.5
鈣	Ca	3.2
銅	Cu	4.7
銀	Ag	4.7
鉑	Pt	6.4

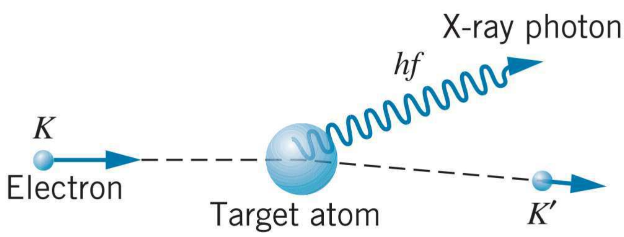
2.5 X射線 X-Rays





$$\lambda_{\min} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{V} \ \mathrm{V \cdot m}$$

Why？



因為功函數僅為幾個電子伏特，而 x 射線管中的加速電位卻是幾萬或幾十萬伏特，故我們可以忽略功函數並且解釋式 (2.12) 中的短波長極限，對應到轟擊電子的總動能 $KE = Ve$ ，完全地轉變為一個光子的能量 $h\nu_{\max}$ ，因此

$$Ve = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{Ve} = \frac{1.240 \times 10^{-6}}{V} \ \mathrm{V \cdot m}$$

Duane-Hunt formula

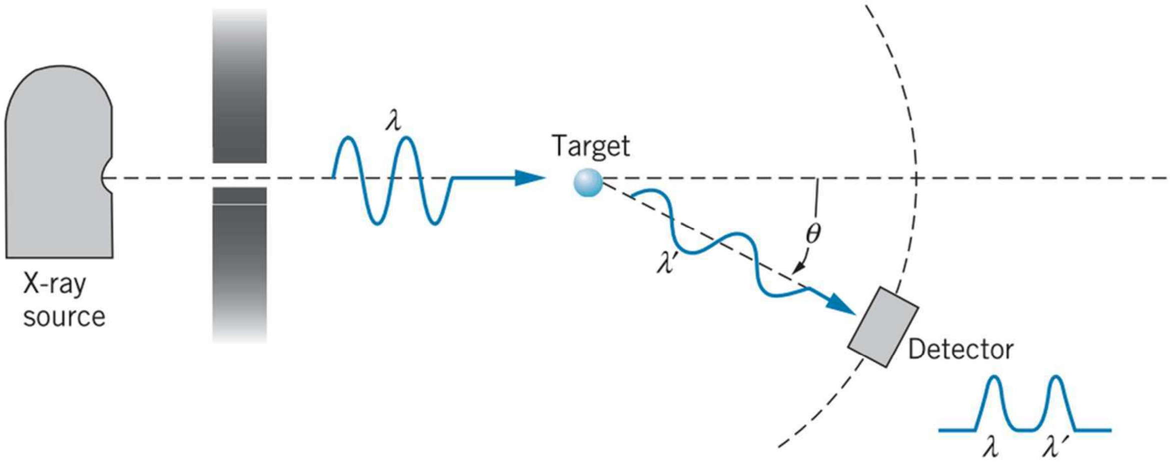
為式 (2.12) 之杜安－杭特公式——的確和式 (2.11) 相同，除了單位不同之外。因此將 x 射線產生視為逆光電效應是很適當的。

2.7 康普頓效應 Compton Effect

1923年Compton效應

高頻X射線被自由或輕元素中的電子（弱束縛電子）散射

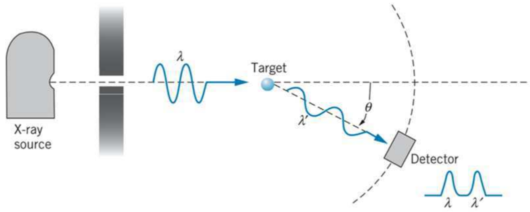
光子理論的進一步驗證

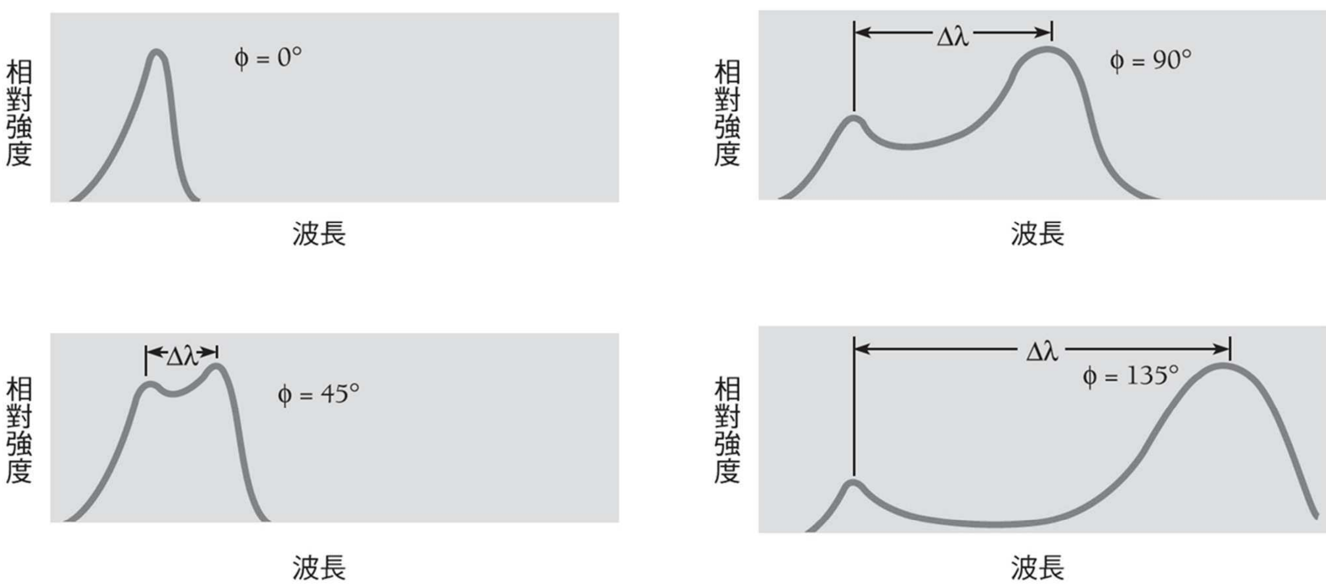


高頻X射線被自由或輕元素中的電子（弱束縛電子）散射後，波長要發生變化，並隨散射角增大波長增大。

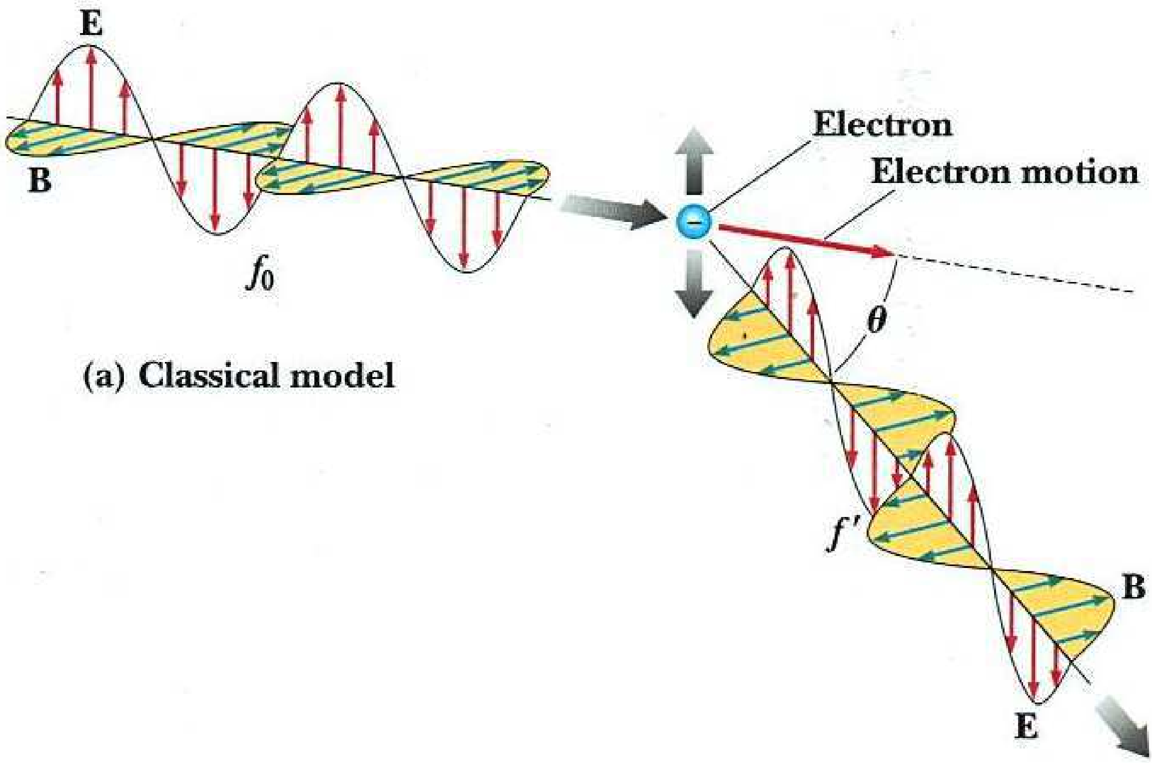
$$\lambda' - \lambda = \left(h / m_e c \right) \left(1 - \cos\phi \right)$$

$h / m_e c$為電子的Compton波長

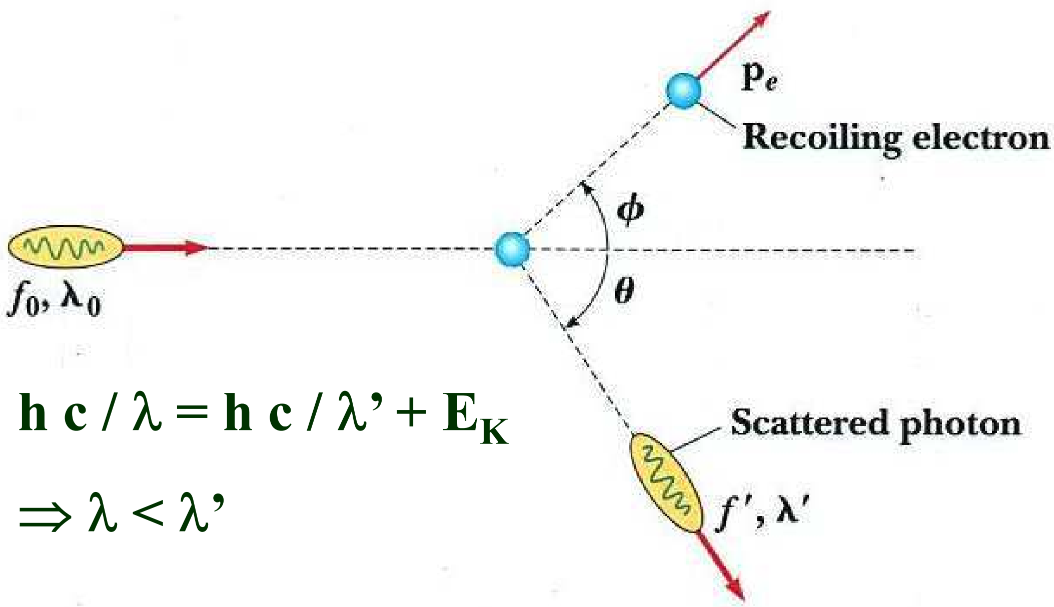




按照古典電動力學，電磁波被電子散射的過程是電子在入射場作用下，作受迫振動而重新輻射電磁波的過程，散射波長不會變化。



但是如果把電子散射電磁波的過程看成是光子與電子的碰撞過程，就可以導出和實驗符合的Compton散射波長改變的公式！



$$h\,c / \lambda = h\,c / \lambda' + E_K$$

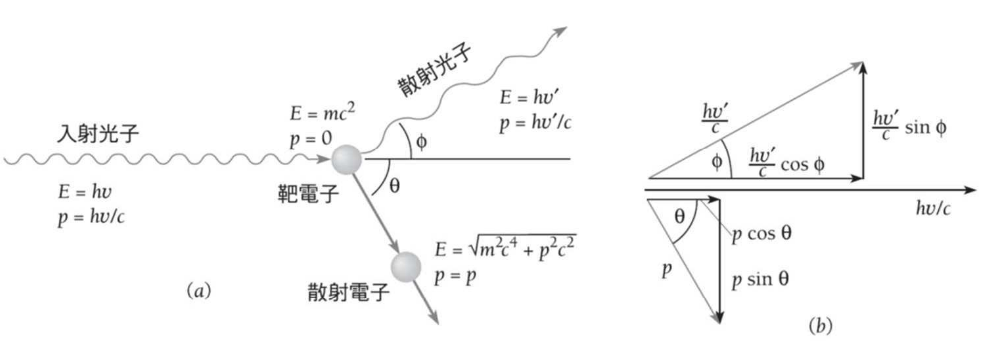
$$\Rightarrow \lambda < \lambda'$$

光具有粒子性的又一實驗證明！

Compton效應的理論解釋

光子的動量和其能量相關　$E = pc$

又光子能量為 $h\nu$，故其動量為　$p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c}$　**(2.15)**



水平方向的動量守恆　$\dfrac{h\nu}{c} + 0 = \dfrac{h\nu'}{c}\cos\phi + p\cos\theta$　**(2.16)**

垂直方向的動量守恆　$0 = \dfrac{h\nu'}{c}\sin\phi - p\sin\theta$　**(2.17)**

水平方向的動量守恆　$\dfrac{h\nu}{c} + 0 = \dfrac{h\nu'}{c}\cos\phi + p\cos\theta$　**(2.16)**

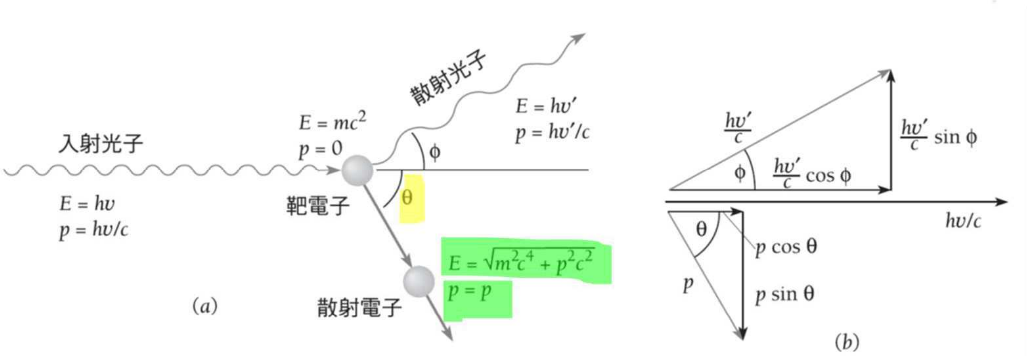
垂直方向的動量守恆　$0 = \dfrac{h\nu'}{c}\sin\phi - p\sin\theta$　**(2.17)**

第一步便是把式 (2.16) 和 (2.17) 乘上 c 並重寫它們

$$\begin{cases} pc\cos\theta = h\nu - h\nu'\cos\phi \\ pc\sin\theta = h\nu'\sin\phi \end{cases}$$

將這兩個方程式平方並且相加可消去 θ 而得

$$p^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu')\cos\phi + (h\nu')^2 \qquad (2.18)$$



從第 1 章中我們知道粒子的總能量有兩個公式

$$E = \mathrm{KE} + mc^2 \tag{1.20}$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{1.24}$$

令這兩個方程式相等可得

$$(\mathrm{KE} + mc^2)^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

因為

$$\left\{\begin{array}{l} p^2c^2 = \mathrm{KE}^2 + 2mc^2\ \mathrm{KE} \\ \\ \mathrm{KE} = h\nu - h\nu' \end{array}\right.$$

能量守恆

我們得到

$$p^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu') + (h\nu')^2 + 2mc^2(h\nu - h\nu') \tag{2.19}$$

從式 (2.18) 中減去此值，最後我們得到 $\boxed{p^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu')\cos\phi + (h\nu')^2}$ (2.18)

$$2mc^2(h\nu - h\nu') = 2(h\nu)(h\nu')(1-\cos\phi) \tag{2.20}$$

$$2mc^2(h\nu - h\nu') = 2(h\nu)(h\nu')(1-\cos\phi)$$

這個關係式以 λ 表示時較為簡單，把式 (2.20) 除以 $2h^2c^2$

$$\frac{mc}{h}\left(\frac{\nu}{c} - \frac{\nu'}{c}\right) = \frac{\nu}{c}\frac{\nu'}{c}(1-\cos\phi)$$

而因為 $\nu/c = 1/\lambda$ 且 $\nu'/c = 1/\lambda'$，所以

$$\frac{mc}{h}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{1-\cos\phi}{\lambda\lambda'}$$

康普頓效應

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)} \tag{2.21}$$

式 (2.21) 在 1920 年代早期由康普頓(Arthur H. Compton)所推導出，因為他是第一個觀察到此現象的人，故命名為**康普頓效應**(Compton effect)，這個現象提供了強烈的證據來支持量子輻射理論。

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)}$$

康普頓波長 $$\boxed{\lambda_C = \frac{h}{mc}} \quad (2.2$$

稱為散射粒子的**康普頓波長**(Compton wavelength)。對一個電子而言，$\lambda_C = 2.426\times10^{-12}$ m，亦等於 2.426 pm（1 pm = 1 微微米 = 10^{-12} m），式 (2.21)
λ_C 來表示

康普頓效應 $$\boxed{\lambda' - \lambda = \lambda_C(1-\cos\phi)} \quad (2.23)$$

現在新的實驗事實，迫使我們不得不承認
光除了具有波動性以外，還具有粒子性！
亦即光具有波粒二象性！

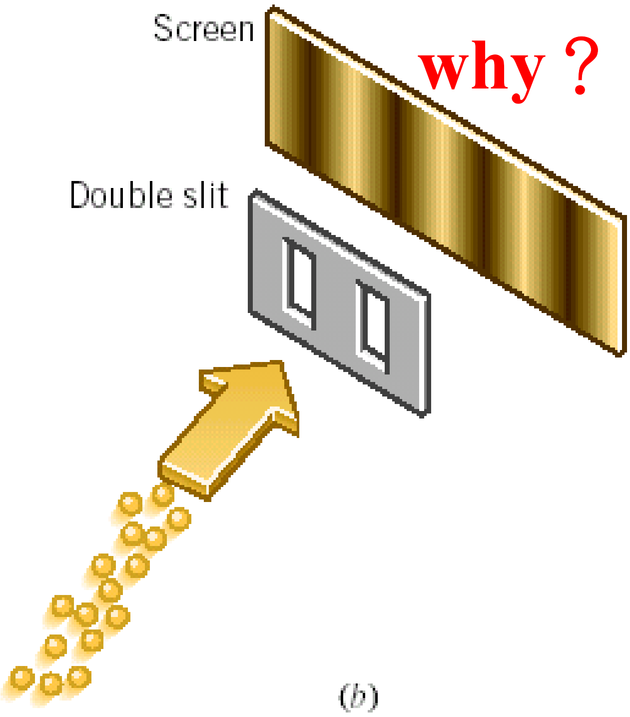
Interference, diffraction effect → wave

Compton effect, photoelectric effect → particle

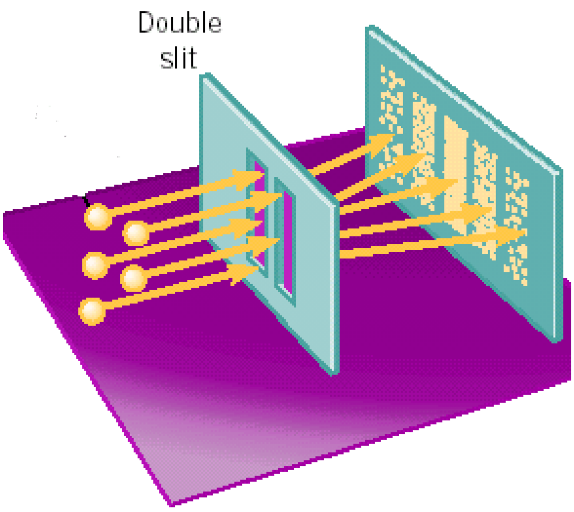
Dual nature of light

Thomas Young雙狹縫實驗 — 2nd round

由粒子性的觀點



(b)



(a)

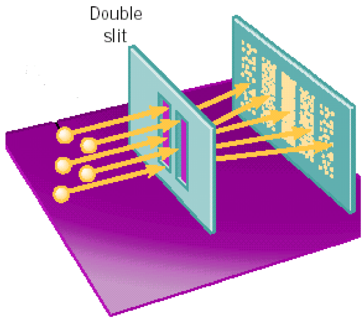
光 — 光子流

$$E = h\nu, \quad I = Nh\nu \propto N$$

條紋明暗分布 —— 屏上光子數分布

強度分布曲線 —— 光子堆積曲線

設想：光强度 I ↓，使得光子一個個通過，則光子是如何運動的？



(a)

通過某狹縫到達屏上某點

通過哪個狹縫且落到哪一點？ 不確定！

起點，終點，軌道均不確定

只能作機率性判斷

亮紋： 光子到達機率大

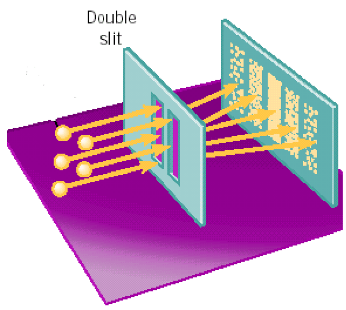
次亮紋： 光子到達機率小

暗紋： 光子到達機率為零

Thomas Young雙狹縫實驗的新觀點

光强度分布 —— 光子落點機率分布

“光子波” ——機率波



(a)

From EM wave to Probability wave （機率波） of photons!

在底片上 r 點干涉條紋的強度 I (正比於波幅 Ψ 的平方)

正比於到達 r 點的光子數目 N，

因此亦正比於光子出現在 r 點的機率 P！

亦即，$P \propto |\Psi|^2$