第23章

高斯定律

普物靜電學總括圖

庫侖定律 $\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}(\vec{r}-\vec{r}_j)$

已知系統之電場
+
疊加原理之運用

任一系統之電場 $\vec{E}(\vec{r})$

$\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}V(\vec{r})$

$V(\vec{r})=\int_{ref.}^{\vec{r}}\vec{E}(\vec{r})\bullet d\vec{l}$

任一系統之電位 $V(\vec{r})$
（須訂參考電位處）

高斯定律 $\oint\vec{E}(\vec{r})\bullet d\vec{A}=\frac{\sum q_{enclosed}}{\varepsilon_0}$

已知系統之電位
（以共同處為參考電位）
+
疊加原理之運用

系統總位能

$$U_{tot}=\frac{1}{2}\int V^{(')}(\vec{r})dq+\frac{1}{2}\sum_j q_jV'_j$$

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}$$

（以無窮處為參考電位）

23.1 *物理是什麼？*

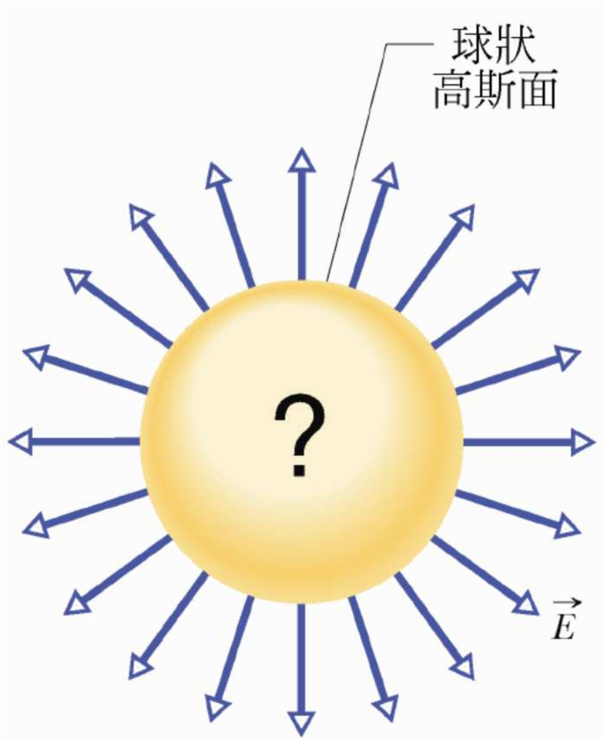


圖 23-1 球狀高斯面。若各點的電場向量大小皆相等，且都是沿徑向朝外，我們可以判定在高斯面內必有正淨電荷分佈，而且其分佈必成球形對稱。

高斯定律使在(封閉)高斯曲面上每個點的電場，與該曲面所圍繞的淨電荷產生關聯。

高斯定律考慮一個假想面包住電荷分佈。

此假想之**高斯區面**可有任意形狀，但能使計算電場最方便的形狀是仿照電荷分佈對稱性

23.2 通量

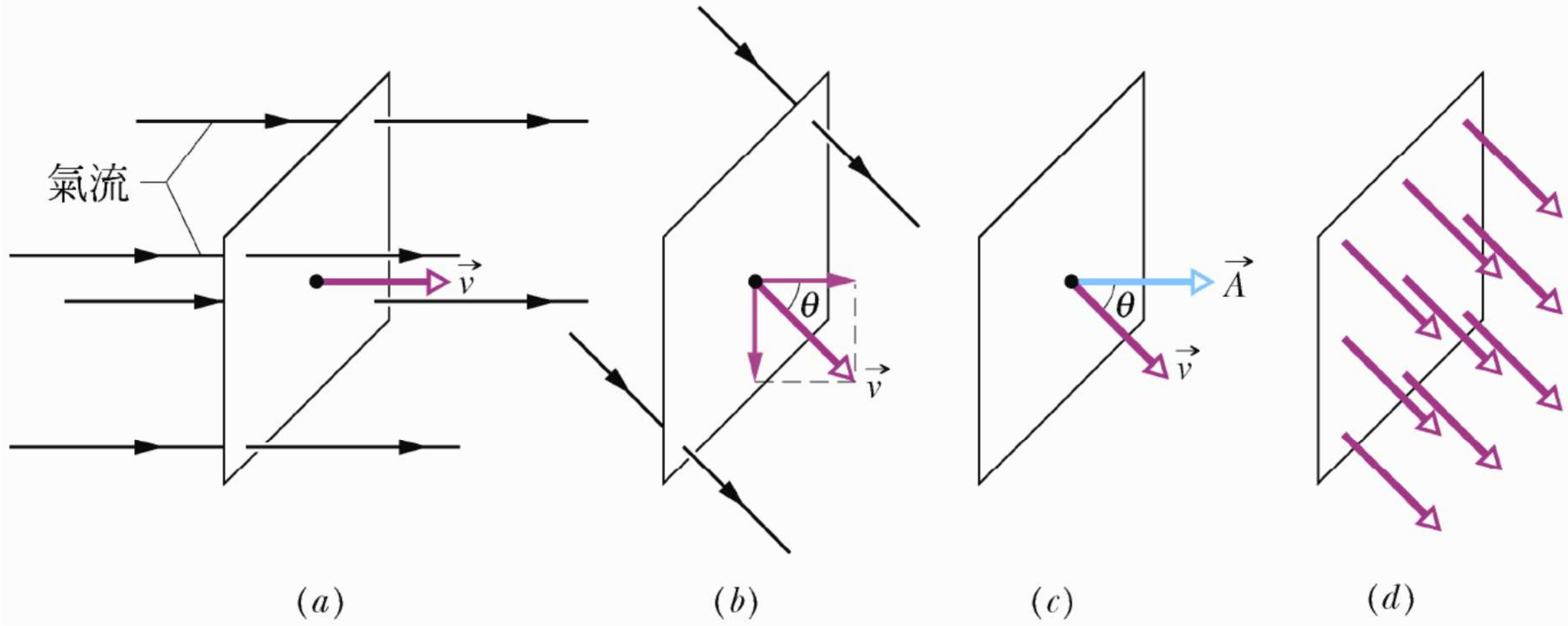


圖 23-2　(a)速度為 $\vec{v}$ 之均勻氣流，垂直於面積為 A 之正方形環平面。(b) $\vec{v}$ 垂直於環平面的分量為 $v\cos\theta$，θ 為 $\vec{v}$ 與平面法線之夾角。(c)面積向量 $\vec{A}$ 垂直於環平面且和 $\vec{v}$ 夾㼜角 θ。(d)通過環平面之速度場。

通過一面積的流率是一個通量例子，圖中為體積通量。

$$\Phi = vA\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{A},$$

23.3 電通量

通過高斯面的電通量正比於通過高斯面的淨電場線。

圖 23-3　在電場中，任意形狀的高斯面。它分割成許多面積為顛的小正方形。圖中顯示三個代表性小正方形 1，2 與 3 上的電場與面積向量。

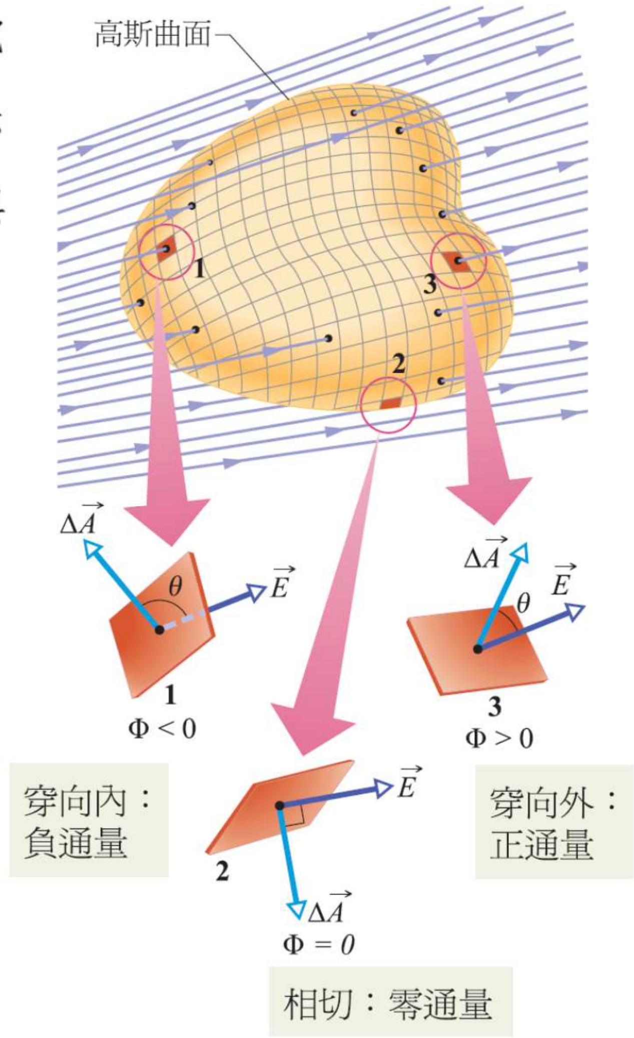


圖23-3的通量可暫時定義為

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}.$$

欲求通過一封閉曲面之電場通量精確值，必須使圖 23-3 中的小正方形愈小愈好，小到趨近於微分極限 dA。因此面積向量也趨近於微分極限。23-3 式之和於是成為一積分式：

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(electric flux through a Gaussian surface).}$$

範例 23.1 均勻電場通過封閉圓柱體的通量

圖 23-4 表示一個半徑為 R 的圓柱形高斯面，圓柱體的中心軸平行於均勻電場 $\vec{E}$。通過此封閉曲面的電場通量 Φ 為若干？

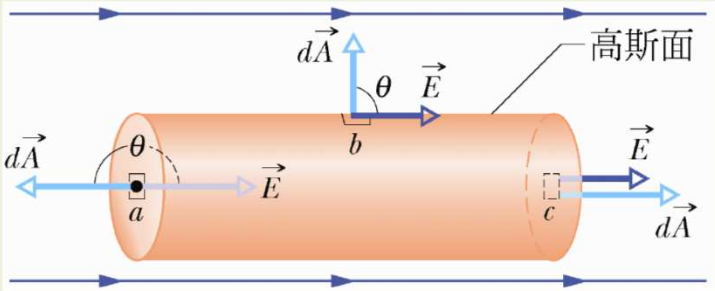


圖 23-4 在均勻電場中，具有兩端面的圓柱形高斯面。圓柱之中心軸平行於電場方向。

關鍵概念

透過將 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$ 對整個高斯面積分，可得通量 Φ。

計算 電場通量可寫成三項之和：對左邊圓柱端面 a，圓柱面 b，右邊端面 c 的積分。因此，由 23-4 式，

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E}\cdot d\vec{A} \tag{23-5}$$

在左方端面上，$\vec{E}$ 與 $\vec{E}$ 的夾角 θ 爲 180 度，且電場的大小 E 爲常數。因此

$$\int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180^\circ)dA = -E\int dA = -EA$$

其中代表端面的面積 $A\,(=\pi R^2)$。同理，對右方的端面 $(\theta = 0)$：

$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0)dA = 0$$

最後，在圓柱面上，各點的 $\theta = 90^\circ$。

$$\int_b \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E(\cos 90^\circ)dA = 0$$

將此三個結果代入 23-5 式，得

$$\Phi = -EA + 0 + EA = 0 \qquad \text{(答)}$$

所有電場線均通過高斯面，自左方端面進入而自右方端面離去，因此通過高斯面的總通量爲零。

範例 23.2　不均勻電場通過封閉立方體的通量

一不均勻電場 $\vec{E}=3.0x\hat{\mathrm{i}}+4.0\hat{\mathrm{j}}$ 通過如圖 23-5a 所示的一個高斯立方體面(E 的單位為牛頓/庫侖，x 單位為公尺)。試問通過右面、左面及頂面的電通量為何？(我們在另一範例考慮其他面。)

關鍵概念

對每個面作純量乘積 $\vec{E}\cdot d\vec{A}$ 的積分便可求得通量 Φ。

右面

面積向量 $\vec{A}$ 恆垂直於此表面且由高斯面內側指向外。因此，此立方體的右面上的任何面積元的向量 $d\vec{A}$ 必指向正 x 方向。圖 23-5b 和 c 表示這樣的元素，而我們會在該面的其他選擇區域有相同向量。最方便的是以單位向量標示法表示：

$$d\vec{A}=dA\hat{\mathrm{i}}$$

由 23-4 式可知，通過右面的通量 Φ 爲

$$\begin{aligned}\Phi_r&=\int\vec{E}\cdot d\vec{A}=\int(3.0x\hat{\mathrm{i}}+4.0\hat{\mathrm{j}})\cdot(dA\hat{\mathrm{i}})\\&=\int[(3.0x)(dA)\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}}+(4.0)(dA)\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{i}}]\\&=\int(3.0x\,dA+0)=3.0\int x\,dA\end{aligned}$$

我們即將對右面進行積分，但我們注意到在此面上 x 的值均相同——即 $x=3.0\text{ m}$。這表示我們可將此常數值代入 x。這可以是一個模糊的參數。即使 x 是一個明確的變數從圖的左至右，由於右面是與 x 軸垂直，在該面每個點都有相同的 x 座標(y 及 z 座標對積分沒有影響)。所以，我們有

$$\Phi_r=3.0\int(3.0)\,dA=9.0\int dA$$

此積分 $\int dA$ 即右面的面積 $A=4.0\text{ m}^2$；因此

$$\Phi_r=(9.0\text{ N/C})(4.0\text{ m}^2)=36\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}\qquad\text{(答)}$$

左面

求左面通量的過程與右面相同。然而，有兩個因子不同。(1)微分面積向量 $d\vec{A}$ 指向負 x 方向，因此 $d\vec{A}=-dA\hat{\mathrm{i}}$ (圖 23-5d)。(2) x 項仍出現在積分中且仍爲常數。但在左面，$x = 1.0$ m。由這兩項變動，我們求出左面的通量 Φ 爲

$$\Phi_l = -12\,\mathrm{N\cdot m^2/C} \qquad \text{(答)}$$

上面

$d\vec{A}$ 指向正 x 方向，因此 $d\vec{A}=-dA\hat{\mathrm{j}}$ (圖 23-5e)。通過上面的通量 Φ_t 便爲：

$$\begin{aligned}\Phi_t &= \int(3.0x\hat{\mathrm{i}}+4.0\hat{\mathrm{j}})\cdot(dA\hat{\mathrm{i}})\\ &= \int[(3.0x)(dA)\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}}+(4.0)(dA)\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}}]\\ &= \int(0+4.0dA)=4.0\int dA\\ &= 16\,\mathrm{N\cdot m^2/C} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

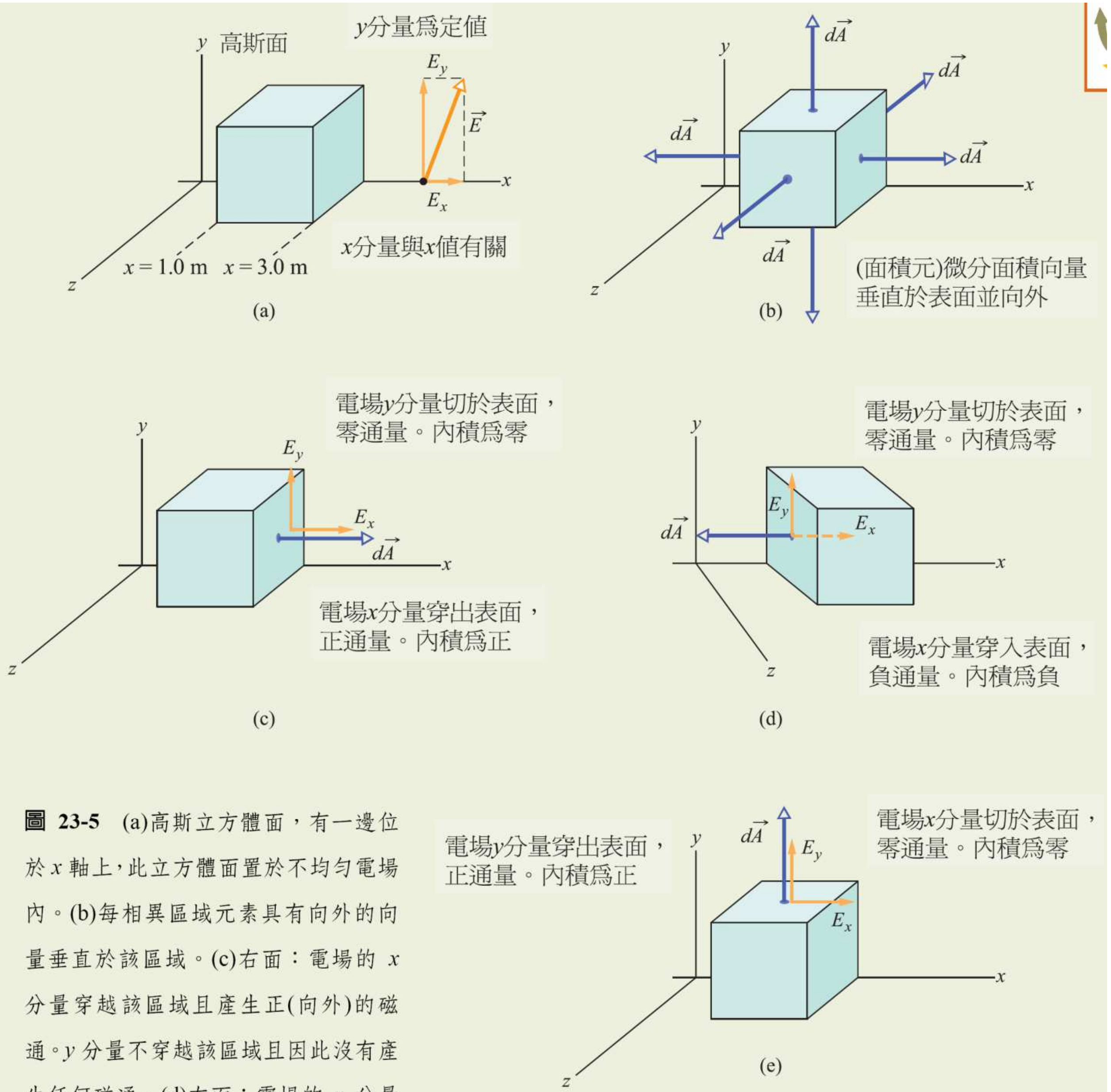


圖 23-5 (a)高斯立方體面，有一邊位於 x 軸上，此立方體面置於不均勻電場內。(b)每相異區域元素具有向外的向量垂直於該區域。(c)右面：電場的 x 分量穿越該區域且產生正(向外)的磁通。y 分量不穿越該區域且因此沒有產生任何磁通。(d)左面：電場的 x 分量產生負(向內)的磁通。(e)上面：電場的 y 分量產生正(向外)的磁通。

23.4 高斯定律

高斯定律建立起通過高斯面之淨通量與高斯面所包之淨電荷q_{enc}兩者間的關係。

$$\varepsilon_0\Phi = q_{\text{enc}} \qquad \text{(Gauss' law).}$$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}} \qquad \text{(Gauss' law).}$$

靜電荷q_{enc} 所有所包的正負電荷的代數和，可能為正或負或零。

若q_{enc} 為正，淨通量向外；若為負，淨通量向內。

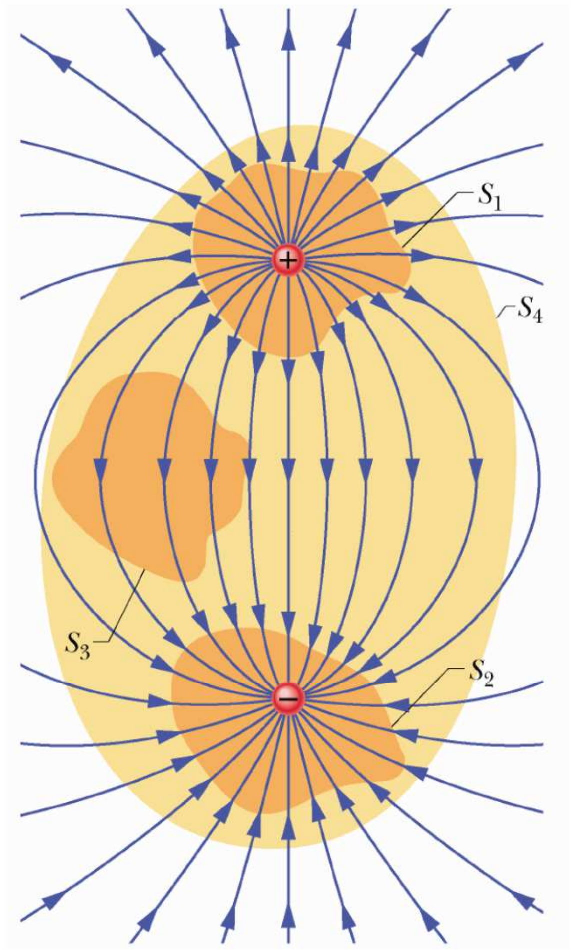


圖 23-6 兩個大小相等，符號相反的點電荷，電場線表示其淨電場。圖中並顯示四個高斯面的截面。曲面 S1 包圍正電荷。曲面 S2 包圍負電荷。曲面 S3 不包圍任何電荷。曲面 S4 包圍兩個電荷，因此也無淨電荷。

範例 23.3　關於封閉淨電荷與淨電通量

圖 23-7 為 5 個帶電的塑膠物體與一個不帶電的銅幣。圖中也顯示了一個高斯面 S 的截面。通過此高斯面的淨電通量為何？若 $q_1 = q4 = +3.1$ nC、$q_2 = q_5 = -5.9$ nC、$q_3 = -3.1$ nC？

關鍵概念

通過曲面的總通量是由曲面內的淨電荷所決定。

計算　因銅幣是電中性，故含有等量的正負電荷，所以對 Φ 並無貢獻。可以包含這些等量的電荷，但當我們計算表面包圍的淨電荷時它的總和將爲零。所以就不列入。電荷 q_4 及 q_5 皆在 S 之外，所以也沒有貢獻。它們確實有電場線通過表面，但因離開與進入相同則電通量貢獻爲零。因此，q_{enc} 即爲 $q_1 + q_2 + q_3$ 之和，由 23-6 式可得：

$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{+3.1\times10^{-9}\,\text{C} - 5.9\times10^{-9}\,\text{C} - 3.1\times10^{-9}\,\text{C}}{8.85\times10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} \qquad \text{(答)}$$

$$= -670\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

負號表示在曲面中的淨電荷爲負，淨通量向內。

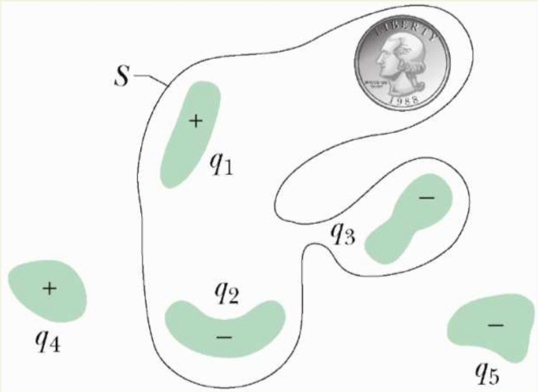


圖 23-7　五個塑膠物體均帶有電荷，及一個不帶電的銅幣。高斯面(圖示為其截面)包圍住三個塑膠物體及銅幣。

範例 23.4　於不均勻電場包圍的電荷

在圖 23-5 中電場為 $\vec{E}=3.0x\hat{\mathrm{i}}+4.0\hat{\mathrm{j}}$ 的高斯立方體包圍淨電荷為多少？(E 的單位為牛頓/庫侖，x 單位為公尺。)

關鍵概念

一個(無論是實際或數學模式)封閉面內所含的淨電荷與通過這個面的總電場通量有關，如 23-6 式($\varepsilon_0\Phi = q_{\mathrm{nec}}$)的高斯定律所示。

通量 為了運用 23-6 式，我們需要知道通過立方體六個面的通量。我們已經知道右面($\Phi = 36\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$)、左面($\Phi_1 = -12\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$)與頂面($\Phi_t = 16\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$)的通量。

對於底面，除了微分面積向量 $d\vec{A}$ 現在是沿著 y 軸向下指外(請回想，它必須要指出高斯面外)，其他就像我們計算頂面一樣。所以，我們有 $d\vec{A}=-dA\hat{\mathrm{j}}$；我們得到

$$\Phi_b = -16\mathrm{N\cdot m^2/C}$$

對於正面，我們得到 $d\vec{A}=dA\hat{\mathrm{k}}$，對於背面，我們得到 $d\vec{A}=-dA\hat{\mathrm{k}}$。當我們利用已知的電場 $\vec{E}=3.0x\hat{\mathrm{i}}+4.0\hat{\mathrm{j}}$ 與這些 $d\vec{A}$ 任一個表示式求點積時，我們得到 0，因此表示這些面上沒有通量。我們現在求出立方體六面的總通量。

$$\begin{aligned}\Phi &= (36-12+16-16+0+0)\mathrm{N\cdot m^2/C}\\ &= 24\ \mathrm{N\cdot m^2/C}\end{aligned}$$

被包圍的電荷 接著，我們使用高斯定律計算被立方體圍繞之電荷 q_{enc}：

$$\begin{aligned}q_{\mathrm{enc}} &= \varepsilon_0\Phi = (8.85\times10^{-12}\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(24\mathrm{N\cdot m^2/C})\\ &= 2.1\times10^{-10}\mathrm{C}\end{aligned} \quad \text{(答)}$$

因此，此立方體所包圍的淨電荷量為正。

23.5 高斯定律與庫侖定律

圖23-8中，正點電荷q位於同心且半徑r的球形高斯面內。將此面分成微分面積元$\boldsymbol{dA}$。

任一點的$\boldsymbol{dA}$面積元向量垂直於該表面，並由內指向外。

由對稱性，任一點的電場$\boldsymbol{E}$也垂直於該表面，並由內指向外。

因此，因為$\boldsymbol{E}$及$\boldsymbol{dA}$ 的夾角為零，高斯定律可寫為：

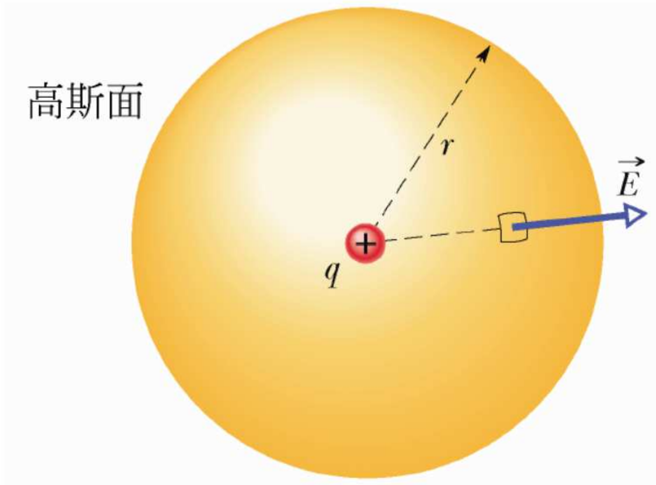


圖 23-8 以點電荷 q 為中心之球形高斯面。

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\, dA = q_{\text{enc}}.$$

$$\varepsilon_0 E \oint dA = q.$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

完全與庫侖定律所得相同。

23.6 帶電孤立導體

如果將額外電荷置於一孤立導體上，這些電荷將全部移動至導體表面。在導體內部將無任何電荷。

圖23-9a 為一孤立銅塊的截面，銅塊帶有外加電荷q，並由一絕緣線懸掛。高斯面就恰好在導體真實表面的內側。在導體內部的電場必為零。因為額外電荷不在高斯面內，必在高斯面外，意指必位於導體的真實表面上。

圖23-9b顯示同一導體，但有一空腔完全位於倒體內。並有一高斯面圍繞該空腔，很接近空腔表面但仍位於導體內。導體內沒有通量通過此一新的該高斯面。因此空腔壁上沒有淨電荷；所有額外電荷維持在導體的外表面上。

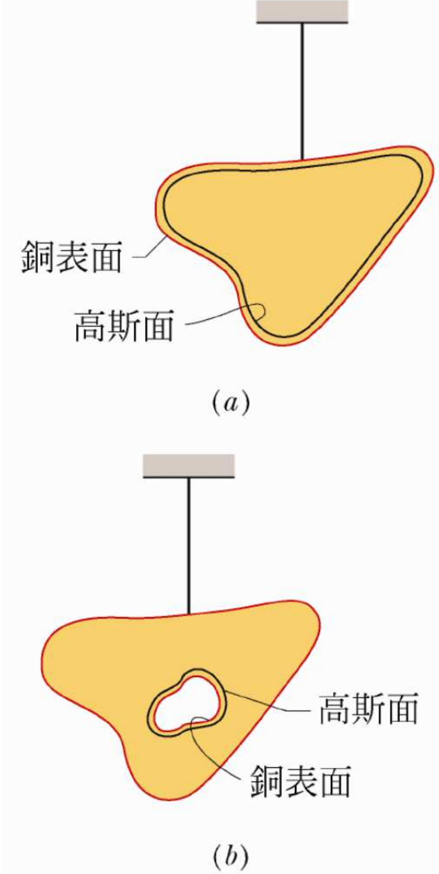


圖 23-9 (a)由絕緣線懸掛，帶電荷 q 之銅塊。高斯面在金屬內部，恰好位在實際表面之內。(b)銅塊內部有一空腔。高斯面在金屬內部，接近空腔表面的地方。

23.6 帶電孤立導體：外部電場

不過利用高斯定律，恰好在導體表面外部的電場卻可輕易的決定。考慮此種表面的一小塊，由於此區域甚小，其曲率可予以忽略而假設其為平坦。

接著想像一個圓柱形高斯面嵌入此小區域，如圖23-10所示：一邊的端面完全在導體中，另一邊則全部在外，而且此圓柱體垂直於導體表面。恰在導體表面外部的電場E必然也垂直於導體表面。

假設面積 A 夠小，在面積上的E為常數。則面積上的通量為EA，即通過高斯面的淨通量Φ。

高斯面所圍的電荷q_{enc}位於導體表面的面積A上。若σ為面電荷密度，則 q_{enc}等於σA。

$$\varepsilon_0 EA = \sigma A,$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{(conducting surface)}.$$

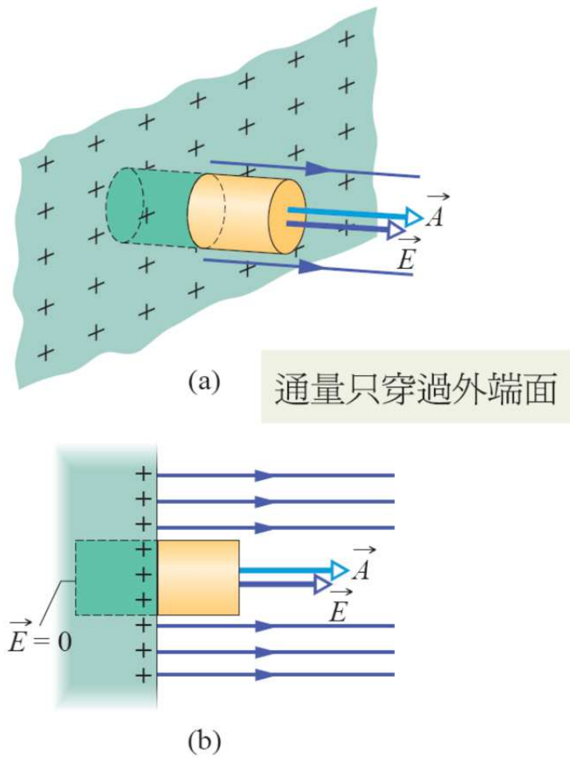


圖 23-10 表面帶有多餘正電荷的大型孤立導體的一小部份之(a)透視圖與(b)側視圖。(封閉)之圓柱形高斯面垂直地嵌入導體中，包圍了一些電荷。電場線穿過外部的圓柱端面，而不穿過內部端面。外部端面之面積為 A，面積向量為 $\vec{A}$。

範例 23.5　金屬球殼，電場與包圍的電荷

圖 23-11a 為內半徑為 R 之金屬球殼截面。帶 5.0 μC 負電之點電荷置於距球心 $R/2$ 處。如果球殼為電中性，則在球殼內表面與外表面的(感應)電荷各為若干？這些電荷的分佈均勻嗎？球殼內外電場之形態為何？

關鍵概念

圖 23-11b 表示在金屬內部，恰在球殼內表面之外的球形高斯面。由於在金屬內部的電場必爲零(在金屬內部的高斯面上亦爲零)。通過高斯面的電通量也必爲零。由高斯定律知，高斯面所包圍的淨電荷必爲零。

推論　爲了讓圍住的總電荷等於零，一旦殼內有－ –5.0 μC 的電荷，故球殼內表面上必有+5.0 μC 的電荷。如果點電荷置於球殼中心，則正電荷會均勻的分佈於內壁上。但是由於點電荷偏離中心點，正電荷的分佈就會偏移，如圖 23-11b 所示，因爲正電荷有集中在最靠近點電荷之內壁上之趨勢。

由於球殼是電中性，只有從內壁有–5.0 μC 的電子移動至外壁時，內壁才會有+5.0 μC 的電荷。如圖 23-11b 所示，這些電子會均勻的分佈在金屬球體的表面。因爲金屬殼是球形的，而且在內壁不均勻分佈的正電荷無法在球殼中產生電場，來影響外壁的電荷分佈，所以負電荷之分佈是均勻的。而這些負電荷互相排斥。

球殼內外的電場線大略如圖 23-11b 所示。所有電場線均與球殼和點電荷垂直相交。由於正電荷的不均勻分佈，球殼內部的電場線形態也不均勻。在球殼外部，電場線的形態，如同一點電荷置於球心，而無球殼時的形態。事實上，不論點電荷在球殼內的位置爲何，此情形都成立。

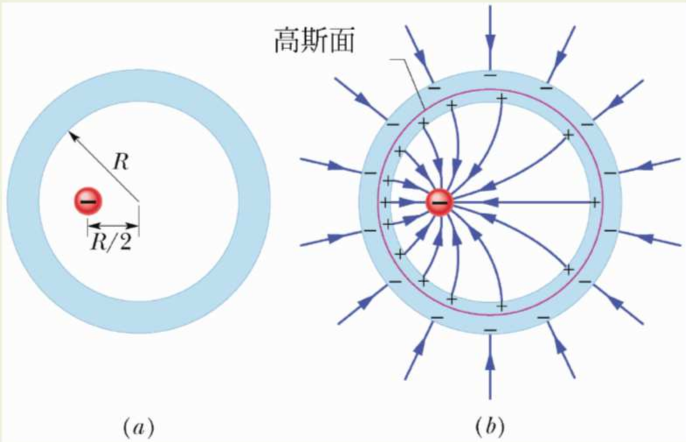


圖 23-11　(a)帶負電點電荷置於電中性金屬球殼的內部。(b)因此，分佈於球殼內壁之正電荷為不均勻分佈，而球殼外部表面有等量的負電荷均勻分佈。

23.7 高斯定律的應用：圓柱對稱

圖23-12 為一無限長之帶電圓柱形塑膠桿，具有均勻帶正電之線電荷密度λ。我們要計算距此桿中心軸r 處，電場大小的表示式。

在高斯面的柱面上任一點，電場大小必相同，並方向為徑向向外（若為正電荷）。

通過柱面的電通量為

$$\Phi = EA\cos\theta = E(2\pi rh)\cos 0 = E(2\pi rh).$$

$$\varepsilon_0\Phi = q_{enc},$$

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h,$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(line of charge).}}$$

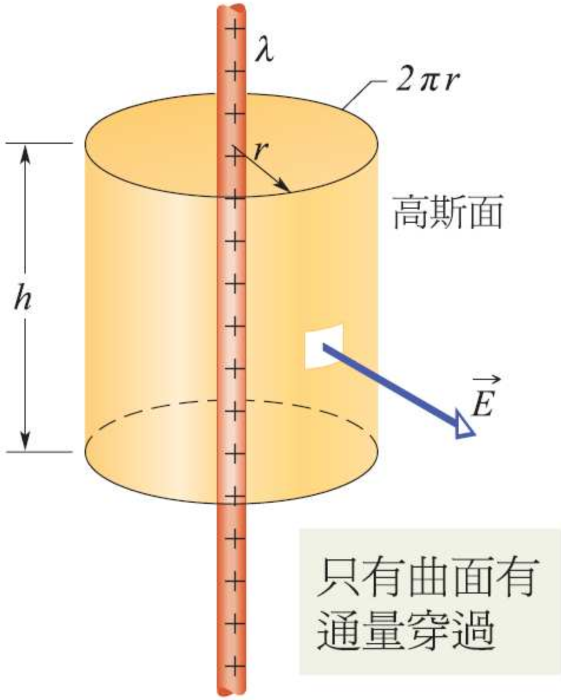


圖 23-12 在一甚長，電荷均勻分佈之圓柱形塑膠桿周圍之高斯面。

範例 23.6　高斯定律與雷雨中的向上閃流

雷雨中的向上閃流(Upward streamer)。圖 23-13 中的女孩正站在紅杉國家公園(Sequoia National Park)的瞭望台上，此時有一個大型暴風雲層靠近她的頭頂。在她身體中的一些導電電子受雲層的負電底層驅趕到地面(圖 23-14a)，導致她帶著正電。因為她的頭髮互相排斥地立著，而且頭髮沿著其體內電荷所產生電場線向外延伸，所以可看出來她帶有不少電量。

閃電並沒有打到這個女人，但是因為其電場已經大到足以破壞周圍空氣的絕緣，所以她其實是非常危險的。這樣的破壞作用將發生在沿著從她身上往外延伸的路徑來進行，這種路徑稱為向上閃流(upward streamer)。向上閃是很危險的，因為它會導致空氣中分子產生離子化，同時釋放數量龐大的電子。如果向上閃流發生在圖 23-13 的女人身上，空氣中的自由電子將移動到她身上，以中和其身上的電荷(圖 23-14b)，因而導致流過她身上巨大而且或許是致命的電流。電流是很危險的，因為它會干擾甚至中斷她的呼吸(所必須要的氧氣)以及她的心跳(需要由血液攜帶氧氣且流動)。電流也可能會造成燒起來。

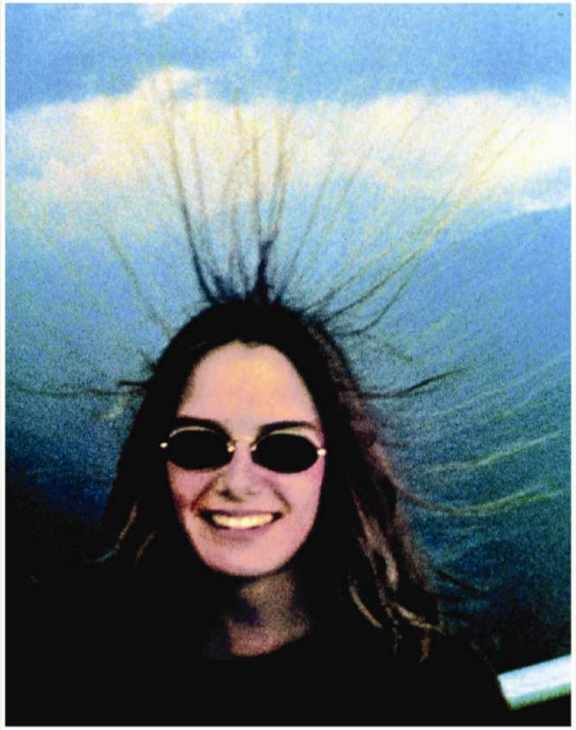


圖 23-13　由於其頭頂上的暴風雨雲層，這個女人已經變得帶著正電荷(感謝 NOAA 提供圖片)。

讓我們將她的身體設想成是狹窄的垂直圓柱，且高度 $L = 1.8$ m，半徑 $R = 0.10$ m(圖 23-14c)。假設電荷 Q 沿著圓柱體均勻分佈，並且假設如果沿著她的身體的電場強度，超過臨界值 $E_c = 2.4$ MN/C，便會發生絕緣破壞。試問會讓沿著其身體的空氣處於絕緣破壞邊緣的電荷 Q 是多少？

關鍵概念

因爲 $R \ll L$，所以我們可以將電荷分佈近似爲一條長電荷線。另外，因爲我們假設電荷沿著這條線均勻分佈，所以我們可以利用 23-12 式($E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$)，來近似代表沿著其身體旁邊的電場強度。

計算 以 E_c 代替 E，以圓柱體半徑 R 代替徑向距離 r，並且以 Q/L 代替線電荷密度 λ，我們得到

$$E_c = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

或 $$Q = 2\pi\varepsilon_0 RLE_c$$

然後代入已知數據，我們得到

$$Q = (2\pi)(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(0.10\,\mathrm{m}) \times(1.8\,\mathrm{m})(2.4\times10^{6}\ \mathrm{N/C}) = 2.402\times10^{-5}\ \mathrm{C} \approx 24\,\mu\mathrm{C} \qquad \text{(答)}$$

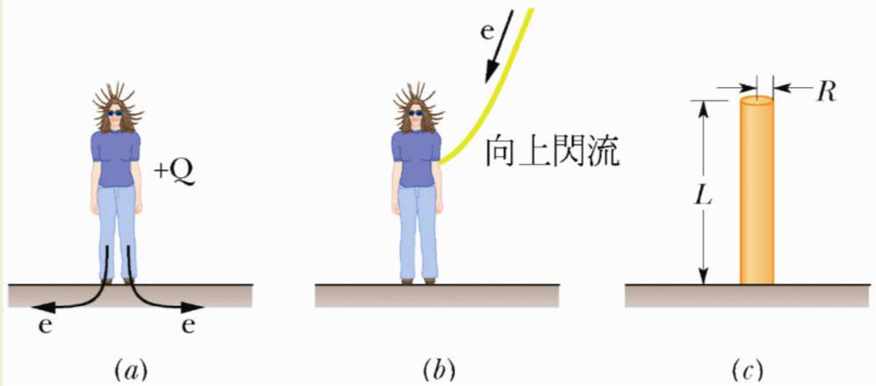


圖 25-14 (a)在這個女人體內的一些導電電子被驅趕到地面，導致她帶有正電荷。(b)如果空氣產生絕緣破壞的現象，則將發展出向上閃流，這種破壞作用將替空氣分子釋放出來的電子提供一條流到此女人身上的路徑。(c)圓柱體代表女人。

23.8 高斯定律的應用：平面對稱---非導體平板

圖23-15 為一無限大絕緣薄板的一部份，具有均勻之(正的)面電荷密度σ。一張塑膠保鮮膜，其一面帶均勻電荷，可以當作此問題的一個簡單模型。我們要計算出距離平板r 處之電場E。

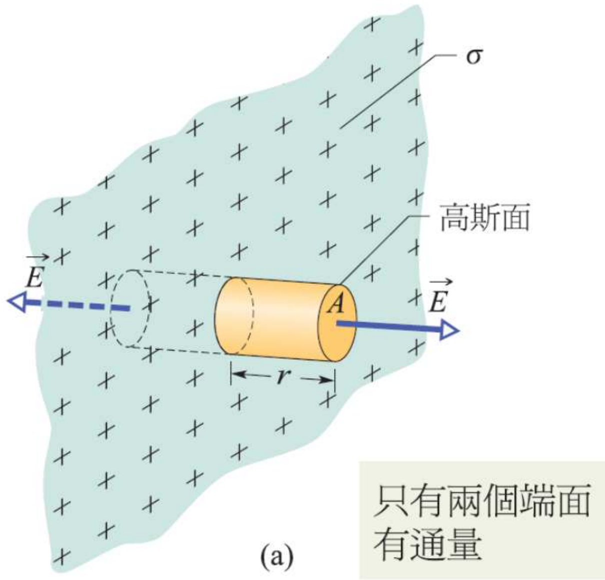
一個方便的高斯面是一個封閉柱面，端面面積A，如圖穿入平板。由對稱性，***E***必垂直於平板及端面。因為電荷為正，***E***為指離平板。柱面遂無通量。因此，***E.dA*** 便是 EdA，

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}},$$

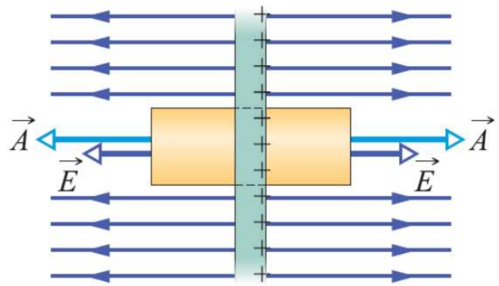
$$\varepsilon_0 (EA + EA) = \sigma A,$$

其中σA 是高斯面所圍之電荷。因此，

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \text{(sheet of charge).}$$



(a)



(b)

圖 25-15 一大型薄塑膠板之(a)透視圖及(b)側視圖。板的一面具有均勻面電荷σ。一個封閉的圓柱高斯表面垂直通過該塑膠版。

23.8 高斯定律的應用：平面對稱---兩導體板

圖23-16a 是一無限導體薄板之截面，帶有多餘的正電荷。由23-6節我們知道多餘的電荷必停留於平板表面。由於平板薄且大，我們可以假設基本上，所有多餘的電荷都在板的兩面。如果沒有外加電場使正電荷成某一特殊分佈，電荷會均勻分佈在兩面，電荷密度為σ1。

由電荷產生恰在平板外的電場大小為$E = \sigma_1/\varepsilon_0$。圖23-16b 為一相同之平板，但帶負電荷，面電荷密度為σ_1。唯一的不同是電場的方向朝向平板。

假設我們將圖23-16a 與b 之平板相互靠近且保持平行(圖23-16c)。因為平板為導體，當兩平板互相靠近時，兩平板上的多餘電荷會互相吸引，所有的多餘電荷均會移至兩平板的內側，如圖23-16c 所示。

由於現在內側平面上有兩倍的電荷，平板內側新的電荷密度σ 為σ1 的兩倍。因此在二平板間任一點的電場之大小為：

$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

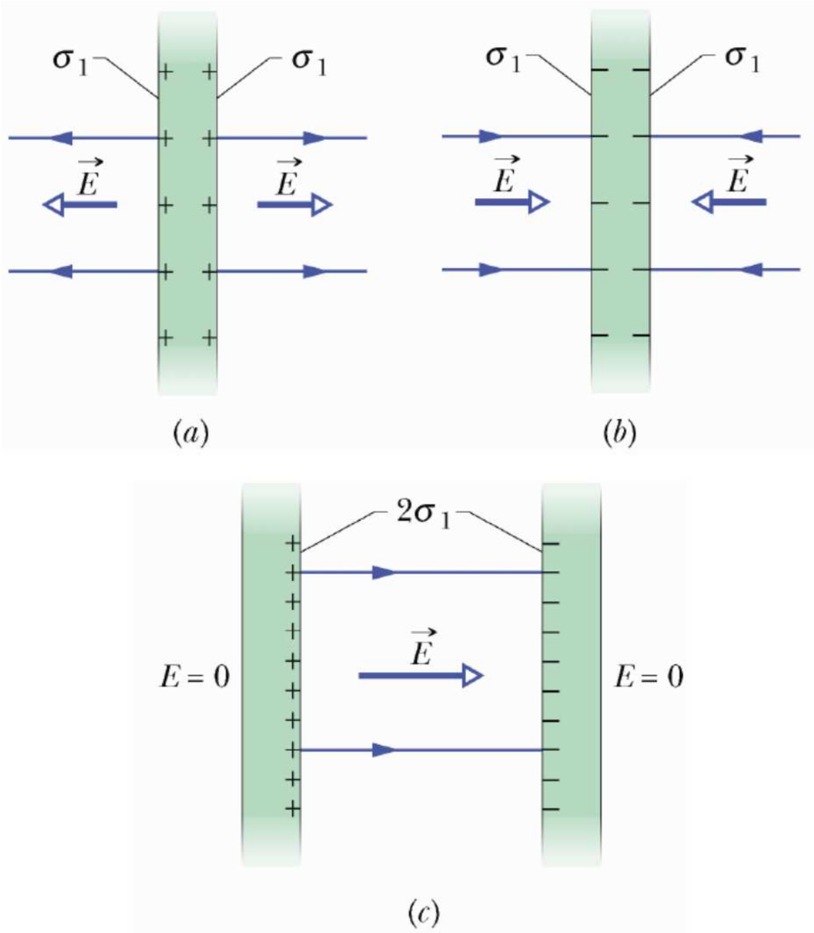


圖 23-16 (a)帶多餘正電荷的大型薄導體板。(b)帶多餘負電荷的相同平板。(c)兩平板平行且靠近。

範例 23.7　靠近兩個平行金屬板之電場

圖 23-17a 為兩個大型非導體平板，二者之一側皆有均勻之電荷分佈。面電荷密度的大小分別為 $\sigma_{(+)} = 6.8\ \mu C/m^2$ 與 $\sigma_{(-)} = 4.3\ \mu C/m^2$。

計算：(a)二平板左邊，(b)二平板之間，(c)二平板右邊之電場 $\vec{E}$。

關鍵概念

由於電荷固定在平板上(它們是在絕緣體上)，欲求圖 23-17a 中平板的電場可由：(1)先計算每一平板之電場，如同其爲孤立之平板。(2)利用疊加原理將孤立平板之電場相加(因爲電場互相平行，所以可用代數相加)。

計算　由 23-13 式，在任一點由正電荷平板所建立的電場 $\vec{E}_{(+)}$，其方向指離平板，大小則爲

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} = \frac{6.8\times10^{-6}\ C/m^2}{(2)(8.85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2)} = 3.84\times10^{5}\ N/C$$

同理，在任一點由負電荷平板建立之電場 $\vec{E}_{(-)}$，其方向指向平板，大小爲：

$$E_{(-)} = \frac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} = \frac{4.3\times10^{-6}\ C/m^2}{(2)(8.85\times10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2)} = 2.43\times10^{5}\ N/C$$

圖 23-17b 顯示了二平板在其左方 L，中間與右方 R 所建立的電場。

在此三區域的合成電場可由疊加原理求得。左邊的電場大小為：

$$
\begin{aligned}
E_L &= E_{(+)} - E_{(-)} \\
&= 3.84\times10^5\ \text{N/C} - 2.43\times10^5\ \text{N/C} \qquad \text{(答)} \\
&= 1.4\times10^5\ \text{N/C}
\end{aligned}
$$

因為 $\vec{E}_{(+)}$ 大於 $\vec{E}_{(-)}$，淨電場 $\vec{E}_L$ 在此區域指向左邊，如圖 23-17c 所示。在兩平板的右邊，電場有相同的大小但指向右邊，如圖 23-17c 所示。

在二平板之間，由兩電場相加，得

$$
\begin{aligned}
E_B &= E_{(+)} + E_{(-)} \\
&= 3.84\times10^5\ \text{N/C} + 2.43\times10^5\ \text{N/C} \qquad \text{(答)} \\
&= 6.3\times10^5\ \text{N/C}
\end{aligned}
$$

電場指向右邊。

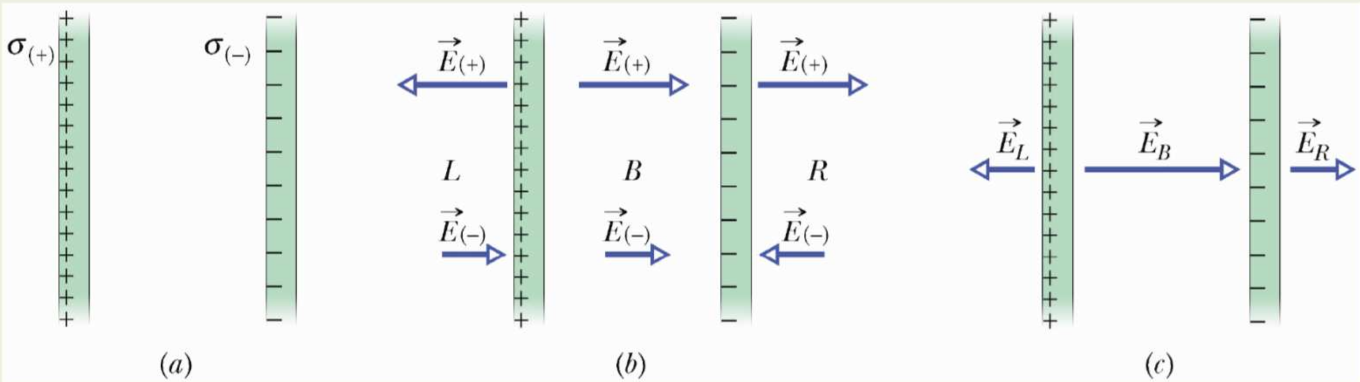


圖 23-17 (a)二大型平行板，單一面上皆帶均勻電荷。(b)分別由兩個平板所產生之電場，(c)利用疊加法算出二平板產生之淨電場。

23.8 高斯定律的應用：球對稱

均勻帶電球殼對球殼外的點電荷之吸力或斥力，就好像所有電荷均集中於球心時的情況。

均勻帶電球殼對殼內之帶電粒子沒有作用力。

23.8 高斯定律的應用：球對稱

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(spherical shell, field at } r \geq R\text{)}.$$

$$E = 0 \qquad \text{(spherical shell, field at } r < R\text{)},$$

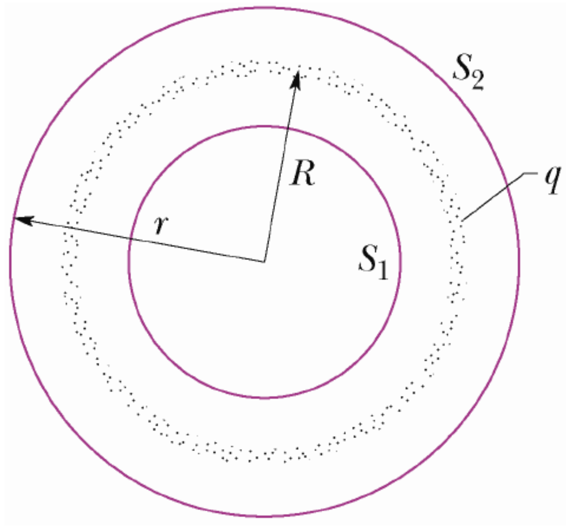
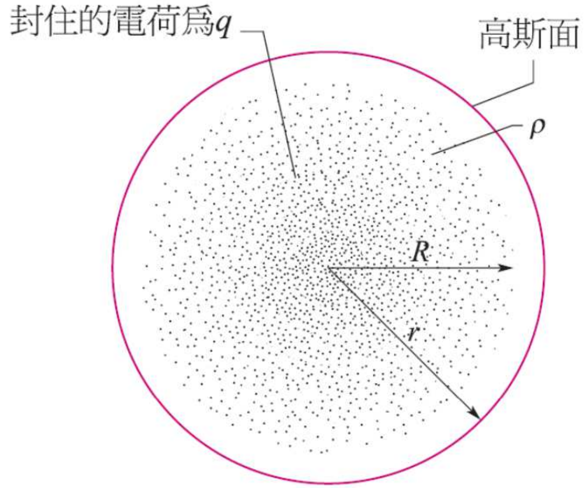


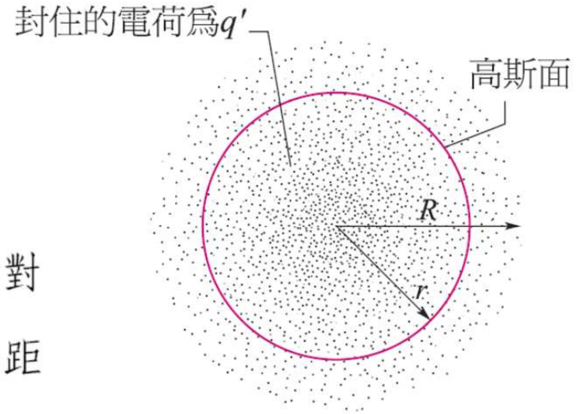
圖 23-18 帶電量 q 之均勻帶電薄球殼橫截面。S1 與 S2 為兩個高斯面。S2 包圍整個球殼，而 S1 僅包圍球殼內部空的部份。

23.8 高斯定律的應用：球對稱

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2} \qquad \text{(spherical distribution, field at } r \le R).$$

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r \qquad \text{(uniform charge, field at } r \le R).$$





穿過表面的通量僅取決於包住的電荷

圖 23-19 黑點代表半徑為R之球形對稱電荷分佈，其體積電荷密度輻僅為距圓心距離的函數球體為非導體，且假設電荷都固定不動。一同心球形，r>R 之高斯面。r<R 的相似高斯面。

高斯定律的應用：圓柱對稱

均勻帶電之無窮長直導線

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = E2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

8th Ed【CH23】Finding the Electric Field II

9th Ed【CH23】Gauss's Law

8th Ed：Homework of Chapter 23：

1, 3, 5, 7, 15, 19, 21, 23, 29, 33, 35, 37, 41, 45, 49, 51

8th Ed【Sample Problem 23-1】

Figure 23-4 shows a Gaussian surface in the form of a cylinder of radius R immersed in a uniform electric field $\vec{E}$, with the cylinder axis parallel to the field. What is the flux Φ of the electric field through this closed surface?

圖 23-4 表示一個半徑為 R 的圓柱形之高斯面，圓柱體的中心軸平行於均勻電場 $\vec{E}$。通過此封閉曲面的電場通量 Φ 為若干？

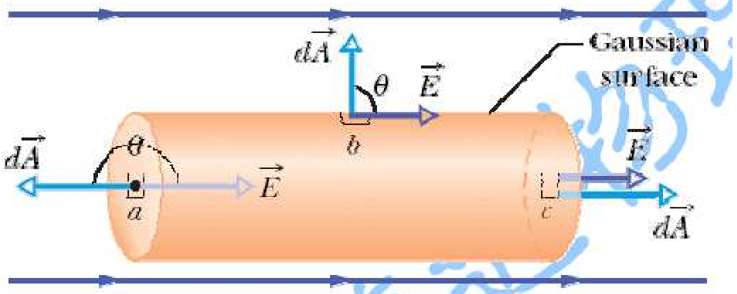
<解>：$\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$

$$= \int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E}\cdot d\vec{A} = -EA + 0 + EA = 0$$

$$\int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180^0)dA = -E\int dA = -EA$$

$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0^0)dA = EA$$

$$\int_b \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E(\cos 90^0)dA = 0$$

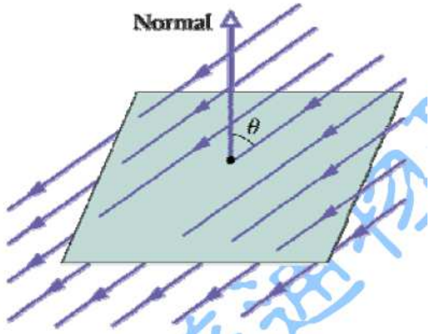


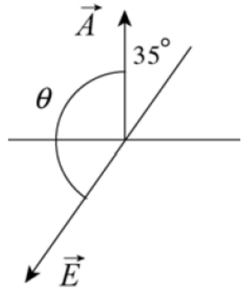
（圖 23-4）

8^{th} Ed【Problem 23-1】: 9^{th} Ed【Problem 23-1】

The square surface shown in Fig. 23-26 measures 3.2 mm on each side. It is immersed in a uniform electric field with magnitude $E = 1800 N/C$ and with field lines at an angle of $\theta = 35^0$ with a normal to the surface, as shown. Take that normal to be directed "outward," as though the surface were one face of a box. Calculate the electric flux through the surface.

圖 23-26 中，一邊長 3.2 mm 的正方形平面，被放置於一強度爲 $E = 1800 N/C$ 的均勻電場中，平面的法向量與電力線的夾角 $\theta = 35^0$ 。將這個平面當作箱子的其中一個面，法向量的方向指向外。計算通過此平面的電通量。





（圖 23-26）

<解>：The vector area $\vec{A}$ and the electric field $\vec{E}$ are shown on the diagram below. The angle θ between them is $180° - 35° = 145°$, so the electric flux through the area is

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta = (1800 \text{ N/C})(3.2\times10^{-3} \text{ m})^2 \cos 145° = -1.5\times10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}.$$

8^{th} Ed【Problem 23-3】: 9^{th} Ed【Problem 23-3】

The cube in Fig. 23-27 has edge length 1.40 m and is oriented as shown in a region of uniform electric field. Find the electric flux through the right face if the electric field, in newtons per coulomb, is given by (a) $6\hat{i}$, (b) $-2\hat{j}$, and (c) $-3\hat{i}+4\hat{k}$. (d) What is x the total flux through the cube for each field?

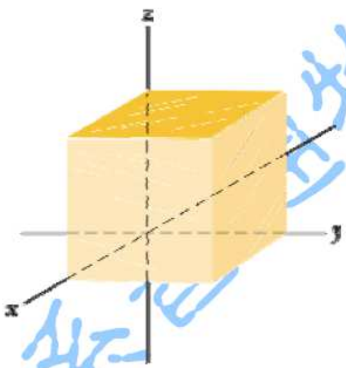
圖 Fig. 23-27 中，一邊長 1.40 m 的正立方體，被放置在一均勻電場中，擺放方式如圖所示。請求出右側表面的電通量，當電場分別爲：(a) $6\hat{i}$ N / C；(b) $-2\hat{j}$ N / C；(c) $-3\hat{i}+4\hat{k}$ N / C。(d)請分別求出在上述三個不同的電場條件下，通過此立方體的總電通量？

<解>：We use $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A}$, where $\vec{A} = A\hat{\mathrm{j}} = (1.40\mathrm{m})^2\hat{\mathrm{j}}$.

(a) $\Phi = (6.00\ \mathrm{N/C})\hat{\mathrm{i}}\cdot(1.40\ \mathrm{m})^2\hat{\mathrm{j}} = 0.$

(b) $\Phi = (-2.00\ \mathrm{N/C})\hat{\mathrm{j}}\cdot(1.40\ \mathrm{m})^2\hat{\mathrm{j}} = -3.92\ \mathrm{N\cdot m^2/C}.$

(c) $\Phi = \left[(-3.00\ \mathrm{N/C})\hat{\mathrm{i}} + (400\,\mathrm{N/C})\hat{\mathrm{k}}\right]\cdot(1.40\ \mathrm{m})^2\hat{\mathrm{j}} = 0.$



（圖 23-27）

(d) The total flux of a uniform field through a closed surface is always zero.

8^{th} Ed【Problem 23-5】: 9^{th} Ed【Problem 23-7】

A point charge of $1.8\mu C$ is at the center of a cubical Gaussian surface 55 cm on edge. What is the net electric flux through the surface?

一帶電量爲$1.8\mu C$的點電荷，位於一正立方體的高斯面中心，已知正立方體的邊長爲 55 cm。請問通過此高斯面的淨電通量爲？

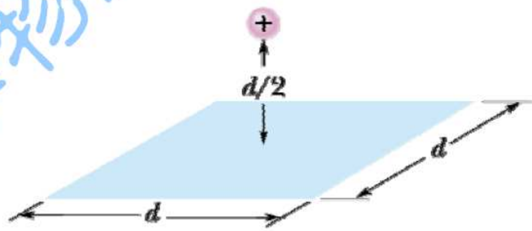
<解>：We use Gauss' law: $\varepsilon_0\Phi = q$, where Φ is the total flux through the cube surface and q is the net charge inside the cube. Thus,

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1.8\times10^{-6}\ \text{C}}{8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} = 2.0\times10^{5}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}.$$

8^{th} Ed【Problem 23-7】：9^{th} Ed【Problem 23-5】

In Fig. 23-29, a proton is a distance $\frac{d}{2}$ directly above the center of a square of side d. What is the magnitude of the electric flux through the square? (Hint: Think of the square as one face of a cube with edge d.)

圖 23-29 中，有一邊長為 d 的正方形，一個質子為於正方形中心正上方 $\frac{d}{2}$ 處。請問通過正方形的電通量大小為？（提示：將正方形視作邊長等於 d 之立方體的其中一個面。）



（圖 23-29）

<解>：To exploit the symmetry of the situation, we imagine a closed Gaussian surface in the shape of a cube, of edge length d, with a proton of charge $q = +1.6\times10^{-19}$ C situated at the inside center of the cube. The cube has six faces, and we expect an equal amount of flux through each face. The total amount of flux is $\Phi_{net} = q/\varepsilon_0$, and we conclude that the flux through the square is one-sixth of that. Thus,

$$\Phi = \frac{q}{6\varepsilon_0} = \frac{1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}}{6(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})} = 3.01\times10^{-9}\ \mathrm{N\cdot m^2/C}.$$

8th Ed【Problem 23-15】: 9th Ed【Problem 23-11】

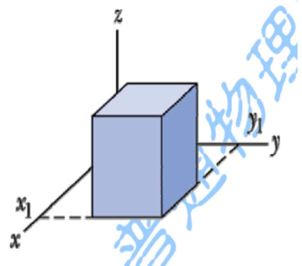
Figure 23-33 shows a closed Gaussian surface in the shape of a cube of edge length 2m, with one corner at $x_1 = 5m$, $y_1 = 4m$. The cube lies in a region where the electric field vector is given by

$E = -3\hat{i} - 4y^2\hat{j} + 3\hat{k}\ N/C$ with y in meters. What is the net charge contained by the cube?

圖 23-33 中，有一封閉高斯面，其形狀爲邊長等於 2m 之正立方體，其中一個頂點的座標爲 $x_1 = 5m$ 、 $y_1 = 4m$ 。已知此處的電場向量爲 $E = -3\hat{i} - 4y^2\hat{j} + 3\hat{k}\ N/C$ ，電場向量受 y 影響。請問由正立方體所包圍的淨電荷爲？

<解>：None of the constant terms will result in a nonzero contribution to the flux (see Eq. 23-4 and Eq. 23-7), so we focus on the x dependent term only:

$$E_{\text{non-constant}} = (-4.00y^2)\ \hat{i} \quad \text{(in SI units)}.$$



(圖 23-33)

The face of the cube located at $y = 4.00$ has area $A = 4.00\ \text{m}^2$ (and it "faces" the $+\hat{j}$ direction) and has a "contribution" to the flux equal to

$$E_{\text{non-constant}}A = (-4)(4^2)(4) = -256\ \text{N}\cdot\text{m/C}^2.$$

The face of the cube located at $y = 2.00$ m has the same area A (however, this one "faces" the $-\hat{j}$ direction) and a contribution to the flux:

$$-E_{\text{non-constant}}A = -(-4)(2^2)(4) = 64\ \text{N}\cdot\text{m/C}^2.$$

Thus, the net flux is $\Phi = (-256 + 64)\ \text{N}\cdot\text{m/C}^2 = -192\ \text{N}\cdot\text{m/C}^2$. According to Gauss's law, we therefore have

$$q_{enc} = \varepsilon_0\Phi = (8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(-192\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}) = -1.70\times10^{-9}\,\text{C}.$$

8th Ed【Problem 23-19】: 9th Ed【Problem 23-17】

A uniformly charged conducting sphere of 1.2 m diameter has a surface charge density of $8.1\mu C/m^2$. (a) Find the net charge on the sphere. (b) What is the total electric flux leaving the surface of the sphere?

一直徑 1.2 m 的球形導體，具有均勻面電荷密度 $8.1\mu C/m^2$ 。(a)請問球表面的淨電荷爲？(b)離開球表面的總電通量爲？

<解>：(a) The charge on the surface of the sphere is the product of the surface charge density σ and the surface area of the sphere (which is $4\pi r^2$, where r is the radius). Thus,

$$q = 4\pi r^2 \sigma = 4\pi\left(\frac{1.2\ \mathrm{m}}{2}\right)^2\left(8.1\times10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}\right) = 3.7\times10^{-5}\ \mathrm{C}.$$

(b) We choose a Gaussian surface in the form of a sphere, concentric with the conducting sphere and with a slightly larger radius. The flux is given by Gauss's law:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{3.66\times10^{-5}\ \mathrm{C}}{8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}} = 4.1\times10^{6}\ \mathrm{N\cdot m^2/C}.$$

8th Ed【Problem 23-21】: 9th Ed【Problem 23-21】

An isolated conductor of arbitrary shape has a net charge of $+10\times10^{-6}C$. Inside the conductor is a cavity within which is a point charge $q=+3\times10^{-6}C$. What is the charge (a) on the cavity wall and (b) on the outer surface of the conductor?

一孤立導體具有淨電荷 $+10\times10^{-6}C$ ，其形狀任意。導體內部有一空穴，空穴中有一電量 $q=+3\times10^{-6}C$ 的點電荷。請問(a)位於導體空穴壁上的電荷爲？(b) 請問導體外表面積上的電荷爲？

<解>：(a) Consider a Gaussian surface that is completely within the conductor and surrounds the cavity. Since the electric field is zero everywhere on the surface, the net charge it encloses is zero. The net charge is the sum of the charge q in the cavity and the charge q_w on the cavity wall, so $q + q_w = 0$ and $q_w = -q = -3.0 \times 10^{-6}$C.

(b) The net charge Q of the conductor is the sum of the charge on the cavity wall and the charge q_s on the outer surface of the conductor, so $Q = q_w + q_s$ and

$$q_s = Q - q_\omega = \left(10\times10^{-6}\ \text{C}\right) - \left(-3.0\times10^{-6}\ \text{C}\right) = +1.3\times10^{-5}\ \text{C}.$$

8th Ed【Problem 23-23】: 9th Ed【Problem 23-25】

An infinite line of charge produces a field of magnitude $4.5\times10^4 N/C$ at a distance of 2m. Calculate the linear charge density.

一條帶有電荷、無窮長的線，在距離線 2m 處所建立的電場，大小爲 $4.5\times10^4 N/C$。請計算出線電荷密度的大小。

<解>：The magnitude of the electric field produced by a uniformly charged infinite line is $E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$, where λ is the linear charge density and r is the distance from the line to the point where the field is measured. See Eq. 23-12. Thus,

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0 Er = 2\pi\left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}\right)\left(4.5\times10^4\ \mathrm{N/C}\right)\left(2.0\ \mathrm{m}\right) = 5.0\times10^{-6}\ \mathrm{C/m}.$$

8^{th} Ed【Problem 23-29】: 9^{th} Ed【Problem 23-31】

Two long, charged, thin-walled, concentric cylindrical shells have radii of 3.0 and 6.0 cm. The charge per unit length is $5\times10^{-6}C/m$ on the inner shell and $-7\times10^{-6}C/m$ on the outer shell. What are the (a) magnitude E and (b) direction (radially inward or outward) of the electric field at radial distance $r=4cm$? What are (c) E and (d) the direction at $r=8cm$?

兩個長、薄、帶電的同心圓柱薄殼，半徑分別為 3.0 cm、6.0 cm。內層圓柱薄殼每單位長度所帶有電荷為$5\times10^{-6}C/m$，外層則為$-7\times10^{-6}C/m$。請求出徑向距離$r=4cm$之電場(a)強度(b)方向（徑向向內或向外）。請求出徑向距離$r=8cm$之電場(a)強度(b)方向（徑向向內或向外）。

<解>：We denote the inner and outer cylinders with subscripts i and o, respectively.

(a) Since $r_i < r = 4.0$ cm $< r_o$,

$$E(r)=\frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{5.0\times10^{-6}\ \text{C/m}}{2\pi(8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(4.0\times10^{-2}\ \text{m})}=2.3\times10^{6}\ \text{N/C}.$$

(b) The electric field $\vec{E}(r)$ points radially outward.

(c) Since $r > r_o$,

$$E(r=8.0\ \text{cm})=\frac{\lambda_i+\lambda_o}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{5.0\times10^{-6}\ \text{C/m}-7.0\times10^{-6}\ \text{C/m}}{2\pi(8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(8.0\times10^{-2}\ \text{m})}=-4.5\times10^{5}\ \text{N/C},$$

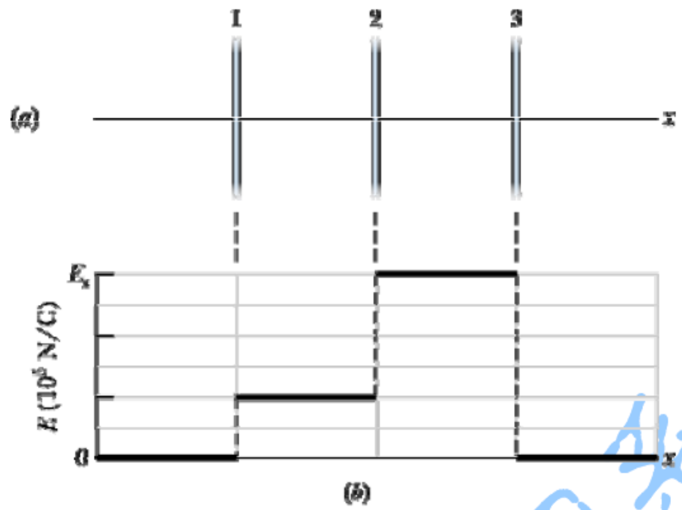
or $|E(r=8.0\ \text{cm})|=4.5\times10^{5}\ \text{N/C}.$

(d) The minus sign indicates that $\vec{E}(r)$ points radially inward.

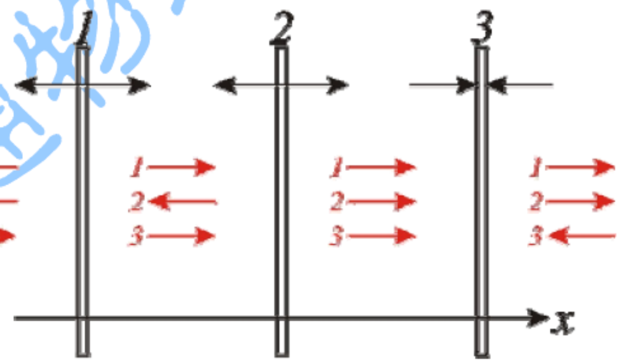
8th Ed【Problem 23-33】: 9th Ed【Problem 23-35】

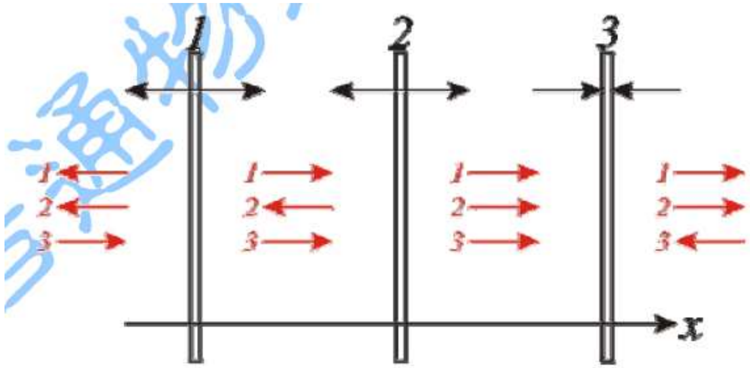
Figure 23-40a shows three plastic sheets that are large, parallel, and uniformly charged. Figure 23-40b gives the component of the net electric field along an x axis through the sheets. The scale of the vertical axis is set by $E_s = 6\times10^5 N/C$. What is the ratio of the charge density on sheet 3 to that on sheet 2?

圖 23-40a 爲三個大、平行、電荷分佈均勻的塑膠薄板。23-40b 爲穿過薄板之 x 軸之淨電場分量。垂直軸的刻度 $E_s = 6\times10^5 N/C$。請問薄板 3 與薄板 2 的電荷密度比値爲？



（圖 23-40）





<解>：In the region between sheets 1 and 2, the net field is $E_1 - E_2 + E_3 \;=\; 2.0 \times 10^5$ N/C .

In the region between sheets 2 and 3, the net field is at its greatest value:

$$E_1 + E_2 + E_3 \;=\; 6.0 \times 10^5 \text{ N/C} .$$

The net field vanishes in the region to the right of sheet 3, where $E_1 + E_2 = E_3$. We note the implication that σ_3 is negative (and is the largest surface-density, in magnitude). These three conditions are sufficient for finding the fields:

$$E_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ N/C}, \quad E_2 = 2.0 \times 10^5 \text{ N/C}, \quad E_3 = 3.0 \times 10^5 \text{ N/C} .$$

From Eq. 23-13, we infer (from these values of E) （Eq. 23-13：$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ）

$$\frac{|\sigma_3|}{|\sigma_2|} = \frac{3.0\times10^5 N/C}{2.0\times10^5 N/C} = -1.5$$

Recalling our observation, above, about σ_3, we conclude $\dfrac{\sigma_3}{\sigma_2} = -1.5$

8th Ed【Problem 23-35】: 9th Ed【Problem 23-37】

A square metal plate of edge length 8.0 cm and negligible thickness has a total charge of $6\times10^{-6}C$. (a) Estimate the magnitude E of the electric field just off the center of the plate (at, say, a distance of 0.50 mm from the center) by assuming that the charge is spread uniformly over the two faces of the plate. (b) Estimate E at a distance of 30 m (large relative to the plate size) by assuming that the plate is a point charge.

一邊長為 8.0 cm、總電量為$6\times10^{-6}C$、且厚度可忽略的正方形金屬薄板。(a)假設所有電荷平均地分佈在板子的兩個面，請估計板子外、與板子正中心極近處的電場大小（例如：與板子的距離為 0.5mm 處）。(b)假設此金屬薄板為一點電荷，試估計距離板子 30m 處，電場的大小（相對於板子的大小，30m 的距離很大）？

<解>：(a) To calculate the electric field at a point very close to the center of a large, uniformly charged conducting plate, we may replace the finite plate with an infinite plate with the same area charge density and take the magnitude of the field to be $E = \sigma/\varepsilon_0$, where σ is the area charge density for the surface just under the point. The charge is distributed uniformly over both sides of the original plate, with half being on the side near the field point. Thus,

$$\sigma = \frac{q}{2A} = \frac{6.0\times10^{-6}\ \text{C}}{2(0.080\ \text{m})^2} = 4.69\times10^{-4}\ \text{C/m}^2.$$

The magnitude of the field is

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{4.69\times10^{-4}\ \text{C/m}^2}{8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} = 5.3\times10^{7}\ \text{N/C}.$$

The field is normal to the plate and since the charge on the plate is positive, it points away from the plate.

(b) At a point far away from the plate, the electric field is nearly that of a point particle with charge equal to the total charge on the plate. The magnitude of the field is

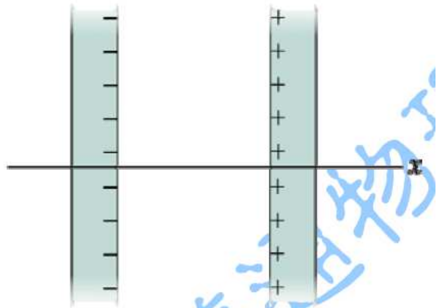
$E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2 = kq/r^2$, where r is the distance from the plate. Thus,

$$E = \frac{(8.99\times10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(6.0\times10^{-6}\ \text{C})}{(30\ \text{m})^2} = 60\ \text{N/C}.$$

8th Ed【Problem 23-37】: 9th Ed【Problem 23-33】

In Fig. 23-43, two large, thin metal plates are parallel and close to each other. On their inner faces, the plates have excess surface charge densities of opposite signs and magnitude $7\times10^{-22}\,C/m^2$. In unit-vector notation, what is the electric field at points (a) to the left of the plates, (b) to the right of them, and (c) between them?

圖 23-43 中，兩個面積很大、距離非常近的金屬平行薄板，兩個板子相對那一面具有電性相反、大小為$7\times10^{-22}\,C/m^2$的電荷密度。請用單位向量符號，寫出下列位置的電場：(a)兩個板子的左側，(b) 兩個板子的右側，(c) 兩個板子的中間。



（圖 23-43）

<解>：We use Eq. 23-13.

(a) To the left of the plates:

$$\vec{E}=(\sigma/2\varepsilon_0)(-\hat{\mathrm{i}})\ \text{(from the right plate)}\ +(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathrm{i}}\ \text{(from the left one)}=0.$$

(b) To the right of the plates:

$$\vec{E}=(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathrm{i}}\ \text{(from the right plate)}+(\sigma/2\varepsilon_0)(-\hat{\mathrm{i}})\ \text{(from the left one)}=0.$$

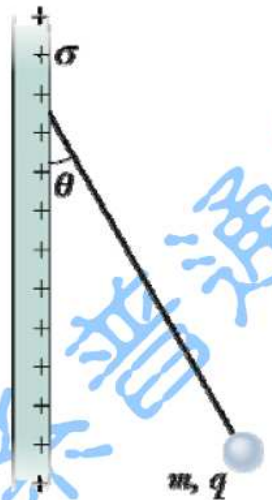
(c) Between the plates:

$$\vec{E}=\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\hat{i})+\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\left(-\hat{i}\right)=\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)(-\hat{i})\ =-\left(\frac{7.00\times10^{-22}\ \mathrm{C/m^2}}{8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}}\right)\hat{i}=\left(-7.91\times10^{-11}\ \mathrm{N/C}\right)\hat{i}$$

8th Ed【Problem 23-41】: 9th Ed【Problem 23-39】

In Fig. 23-45, a small, nonconducting ball of mass $m = 1mg$ and charge $q = 2\times10^{-8}C$ (distributed uniformly through its volume) hangs from an insulating thread that makes an angle $\theta = 30^0$ with a vertical, uniformly charged nonconducting sheet (shown in cross section). Considering the gravitational force on the ball and assuming the sheet extends far vertically and into and out of the page, calculate the surface charge density σ of the sheet.

圖 23-45 中爲一不導電的小球，其質量 $m = 1mg$ 、帶電量 $q = 2\times10^{-8}C$ （電荷均勻地分佈在整個球體），懸掛在一絕緣的細繩上，細繩另一端固定在一垂直、電荷均勻分佈的不導電薄板，二者夾角 $\theta = 30^0$ 。假設薄板的面積無窮大，考慮重力對小球的影響，請算出薄板的面電荷密度 σ 。



（圖 23-45）

<解>：The forces acting on the ball are shown in the diagram on the right. The gravitational force has magnitude mg, where m is the mass of the ball; the electrical force has magnitude qE, where q is the charge on the ball and E is the magnitude of the electric field at the position of the ball; and, the tension in the thread is denoted by T. The electric field produced by the plate is normal to the plate and points to the right. Since the ball is positively charged, the electric force on it also points to the right. The tension in the thread makes the angle θ (= 30°) with the vertical.

Since the ball is in equilibrium the net force on it vanishes. The sum of the horizontal components yields

$$qE - T\sin\theta = 0$$

and the sum of the vertical components yields

$$T\cos\theta - mg = 0$$

The expression $T = \dfrac{qE}{\sin\theta}$, from the first equation, is substituted into the second to obtain $qE = mg\tan\theta$. The electric field produced by a large uniform plane of charge is given by

$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, where σ is the surface charge density. Thus,

$$\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} = mg\tan\theta$$

And $\sigma = \dfrac{2\varepsilon_0 mg\tan\theta}{q}$

$$= \frac{2\left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N.m^2}\right)\left(1.0\times10^{-6}\ \mathrm{kg}\right)\left(9.8\ \mathrm{m/s^2}\right)\tan 30^\circ}{2.0\times10^{-8}\ \mathrm{C}}$$

$$= 5.0\times10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}.$$

8th Ed【Problem 23-45】: 9th Ed【Problem 23-47】

An unknown charge sits on a conducting solid sphere of radius 10 cm. If the electric field 15 cm from the center of the sphere has the magnitude $3\times10^3\,N/C$ and is directed radially inward, what is the net charge on the sphere?

一半徑為 10 cm、帶電量不明之實心導體球。若距離球心 15 cm 處的電場強度為 $3\times10^3\,N/C$、方向為徑向向內，請問球上的淨電荷為？

<解>：Charge is distributed uniformly over the surface of the sphere and the electric field it produces at points outside the sphere is like the field of a point particle with charge equal to the net charge on the sphere. That is, the magnitude of the field is given by $E = |q|/4\pi\varepsilon_0 r^2$, where $|q|$ is the magnitude of the charge on the sphere and r is the distance from the center of the sphere to the point where the field is measured. Thus,

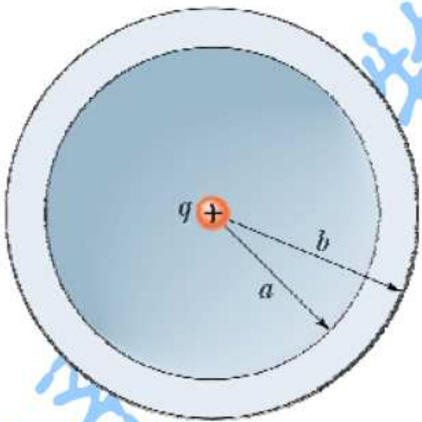
$$|q| = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E = \frac{(0.15\text{ m})^2(3.0\times10^3\text{ N/C})}{8.99\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} = 7.5\times10^{-9}\text{ C}.$$

The field points inward, toward the sphere center, so the charge is negative, i.e., $q = -7.5\times10^{-9}\,\text{C}$.

8th Ed【Problem 23-49】: 9th Ed【Problem 23-51】

In Fig. 23-50, a nonconducting spherical shell of inner radius $a = 2cm$ and outer radius $b = 2.4cm$ has (within its thickness) a positive volume charge density $\rho = \frac{A}{r}$, where A is a constant and r is the distance from the center of the shell. In addition, a small ball of charge $q = 45\,fC$ is located at that center. What value should A have if the electric field in the shell ($a \le r \le b$) is to be uniform?

圖 23-50 中，一非導電球殼，其內徑 $a = 2cm$ 、外徑 $b = 2.4cm$ ，具有正的電荷密度 $\rho = \frac{A}{r}$ ，A 爲常數、r 爲球殼到球心的距離。此外，球心處有一帶電量 $q = 45\,fC$ 的小球。若球殼內（$a \le r \le b$）的電場是均勻的，求 A 的大小？



(圖 23-50)

<解>：To find an expression for the electric field inside the shell in terms of A and the distance from the center of the shell, select A so the field does not depend on the distance. We use a Gaussian surface in the form of a sphere with radius r_g, concentric with the spherical shell and within it ($a < r_g < b$). Gauss' law will be used to find the magnitude of the electric field a distance r_g from the shell center. The charge that is both in the shell and within the Gaussian sphere is given by the integral $q_s = \int \rho \, dV$ over the portion of the shell within the Gaussian surface. Since the charge distribution has spherical symmetry, we may take dV to be the volume of a spherical shell with radius r and infinitesimal thickness dr: $dV = 4\pi r^2 \, dr$. Thus,

$$q_s = 4\pi \int_a^{r_g} \rho r^2 dr = 4\pi \int_a^{r_g} \frac{A}{r} r^2 dr = 4\pi A \int_a^{r_g} r \, dr = 2\pi A \left(r_g^2 - a^2\right).$$

The total charge inside the Gaussian surface is

$$q + q_s = q + 2\pi A \left(r_g^2 - a^2\right).$$

The electric field is radial, so the flux through the Gaussian surface is $\Phi = 4\pi r_g^2 E$, where E is the magnitude of the field. Gauss' law yields

$$4\pi\varepsilon_0 E r_g^2 = q + 2\pi A\left(r_g^2 - a^2\right).$$

We solve for E:

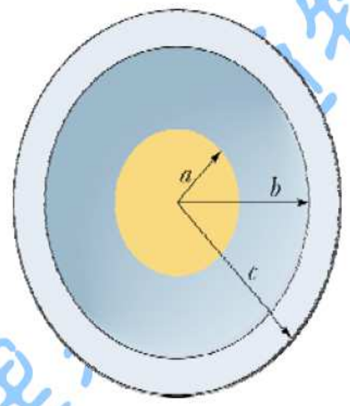
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_g^2} + 2\pi A - \frac{2\pi A a^2}{r_g^2}\right].$$

For the field to be uniform, the first and last terms in the brackets must cancel. They do if $q - 2\pi A a^2 = 0$ or $A = q/2\pi a^2$. With $a = 2.00 \times 10^{-2}$ m and $q = 45.0 \times 10^{-15}$ C, we have $A = 1.79 \times 10^{-11}\ \text{C/m}^2$.

8th Ed【Problem 23-51】: 9th Ed【Problem 23-49】

In Fig. 23-52, a solid sphere of radius $a = 2cm$ is concentric with a spherical conducting shell of inner radius $b = 2a$ and outer radius $c = 2.4a$. The sphere has a net uniform charge $q_1 = +5\,fC$; the shell has a net charge $q_2 = -q_1$. What is the magnitude of the electric field at radial distances (a) $r = 0$, (b) $r = \dfrac{a}{2}$, (c) $r = a$, (d) $r = 1.5a$, (e) $r = 2.3a$, and (f) $r = 3.5a$? What is the net charge on the (g) inner and (h) outer surface of the shell?

圖 23-52，有一半徑 $a = 2cm$ 之實心球，被一內徑 $b = 2a$ 、外徑 $c = 2.4a$ 導電球殼包圍，球與球殼圓心相同。實心球具有均勻淨電荷 $q_1 = +5\,fC$ ，球殼具有淨電荷 $q_2 = -q_1$ 。請問半徑距離分別為(a) $r = 0$, (b) $r = \dfrac{a}{2}$, (c) $r = a$, (d) $r = 1.5a$, (e) $r = 2.3a$, (f) $r = 3.5a$ 時，電場的大小？請問(g)球殼內面(h)球殼外面　淨電荷分別為？



（圖 23-52）

<解>：At all points where there is an electric field, it is radially outward. For each part of the problem, use a Gaussian surface in the form of a sphere that is concentric with the sphere of charge and passes through the point where the electric field is to be found. The field is uniform on the surface, so $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E$, where r is the radius of the Gaussian surface.

For $r < a$, the charge enclosed by the Gaussian surface is $q_1(r/a)^3$. Gauss' law yields

$$4\pi r^2 E = \left(\frac{q_1}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^3 \;\Rightarrow\; E = \frac{q_1 r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}.$$

(a) For $r = 0$, the above equation implies $E = 0$.

(b) For $r = a/2$, we have

$$E = \frac{q_1(a/2)}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(5.00\times10^{-15}\,\mathrm{C})}{2(2.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2} = 5.62\times10^{-2}\ \mathrm{N/C}.$$

(c) For $r = a$, we have

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{(8.99\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(5.00\times10^{-15}\,\mathrm{C})}{(2.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2} = 0.112\ \mathrm{N/C}.$$

In the case where $a < r < b$, the charge enclosed by the Gaussian surface is q_1, so Gauss' law leads to

$$4\pi r^2 E = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

(d) For $r = 1.50a$, we have

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{(8.99\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(5.00\times10^{-15}\ \text{C})}{(1.50\times2.00\times10^{-2}\ \text{m})^2} = 0.0499\ \text{N/C}.$$

(e) In the region $b < r < c$, since the shell is conducting, the electric field is zero. Thus, for $r = 2.30a$, we have $E = 0$.

(f) For $r > c$, the charge enclosed by the Gaussian surface is zero. Gauss' law yields $4\pi r^2 E = 0 \Rightarrow E = 0$. Thus, $E = 0$ at $r = 3.50a$.

(g) Consider a Gaussian surface that lies completely within the conducting shell. Since the electric field is everywhere zero on the surface, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$ and, according to Gauss' law, the net charge enclosed by the surface is zero. If Q_i is the charge on the inner surface of the shell, then $q_1 + Q_i = 0$ and $Q_i = -q_1 = -5.00$ fC.

(h) Let Q_o be the charge on the outer surface of the shell. Since the net charge on the shell is $-q$, $Q_i + Q_o = -q_1$. This means

$$Q_o = -q_1 - Q_i = -q_1 - (-q_1) = 0.$$