第25章

電容

25.2 電容

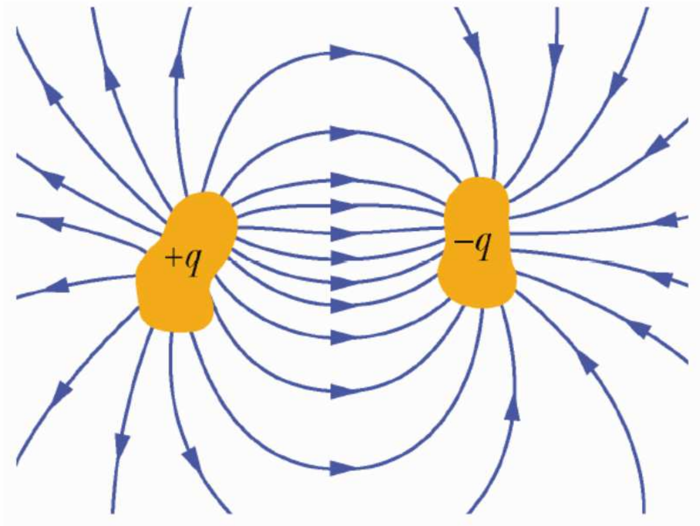


圖 25-2 兩個彼此絕緣且也與周圍環境絕緣的導體，會形成電容器。當電容器充電後，兩個導體，或稱之為極板，各帶有異號而等量(q)之電荷。(Paul Silvermann/Fundamental Photographs)

25.2 電容

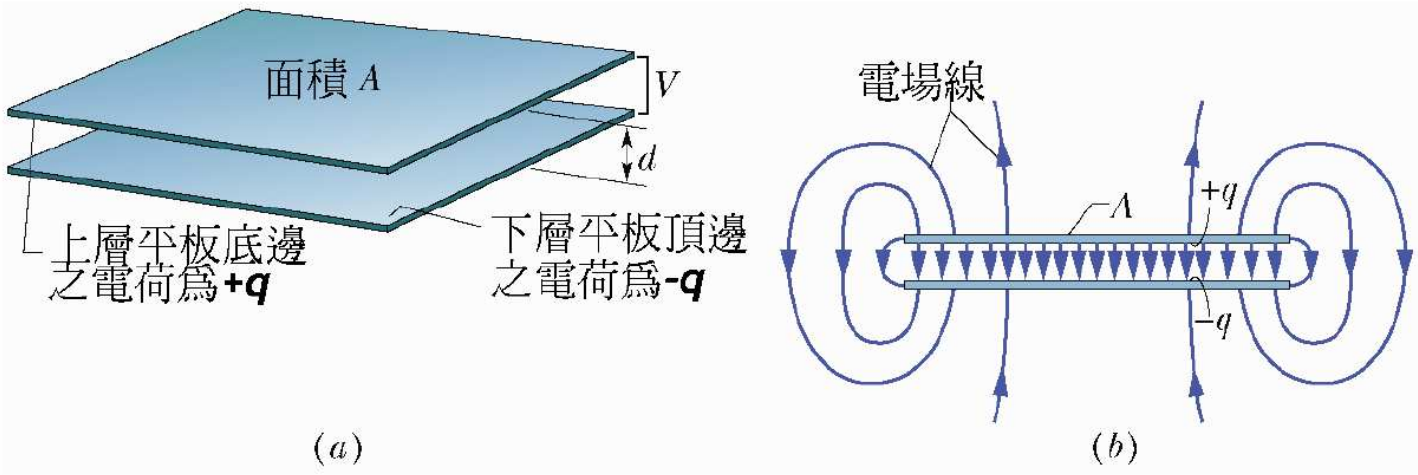


圖 25-3 (a)平行板電容器，由兩塊面積為 A，相距為 d 的金屬板組成。在它們相對的表面上，帶有等量但異號的電荷 q。(b)如場線所示，在面板間的中央區域內由帶電平板產生的電場為均勻電場。在邊緣處的場線則並不均勻，圖中顯示邊緣處的場線呈現「邊緣效應」。

25.2 電容

當電容器充電後，兩極板會帶有大小相同，但符號相反的電量：+q與-q。因而我們稱此電容器的帶電量為q，這是單一極板上的電量之絕對值(注意電容器之淨電荷為零，並不是q)。

電容的電荷q 與電位差 V 有比例關係：

$$q = CV.$$

比例常數C 稱為電容器的電容值。其值僅取決極板的幾何形狀而非電荷量或電位差。

SI單位為法拉 *farad (F):* **1 farad (1 F)= 1 coulomb per volt =1 C/V.**

25.2 電容：對電容充電

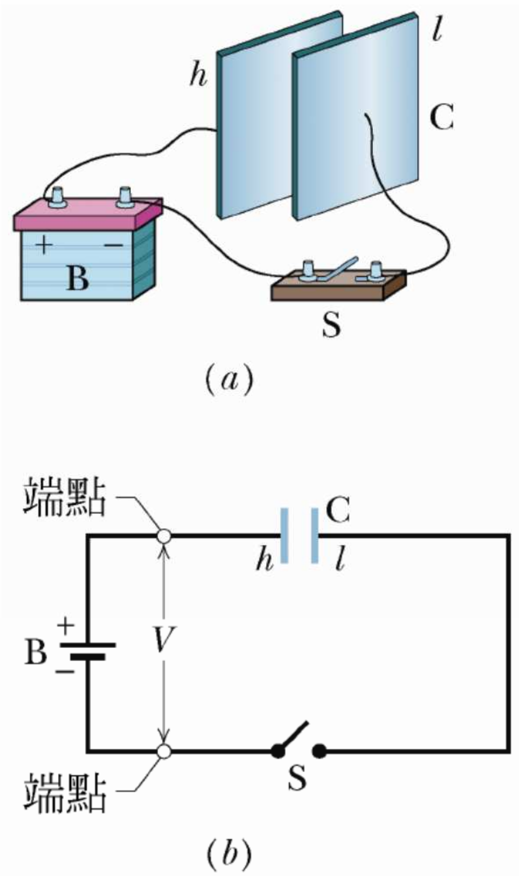


圖 25-4 電池 B、開關 S，及電容器 C 的極板 h、l 連接在一電路上。以電路元件之符號所繪成的線路圖。

圖25-4a 及b 所示之電路並未形成迴路，因為開關S 是打開的；意即，開關上的導線並未連接起來。當開關閉合時，導線連接起來，即形成一完整電路，電荷便可流過開關及導線。

當極板充電時，電位差增加直至等於電池的電位差V。此時電場為0，沒有電子的驅動力。電容稱為完全充電，具有電位差V 及電荷q。

25.3 電容之計算

建立電容極板間的電場E與板上電荷q之關係時，我們使用高斯定律：

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q.$$

其中 q 是高斯面所包之電荷， $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ 是高斯面的淨通量。圖中的情形為，

$$q = \varepsilon_0 EA$$

其中 A 是高斯面中有通量通過的部份之面積。極板間的電位差與電場之關係為：

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

若 V 為 V_f-V_i，

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$V = \int_-^+ E\,ds = E\int_0^d ds = Ed.$$

其中

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \text{(parallel-plate capacitor).}}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}.$$

使用高斯定律建立q及E之關係。然後對E作積分，求出位能差

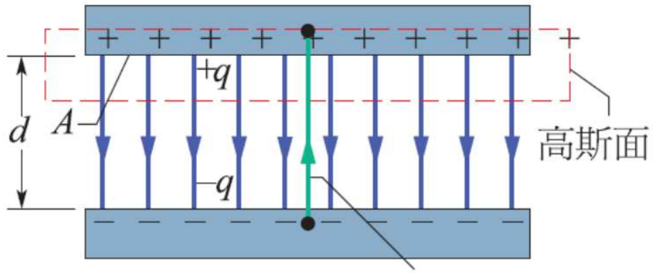


圖 25-5 帶電的平行板電容器。有一高斯面包含所有正電板上的電荷。25-6 式的積分路徑是由負電板直接到正電板。

25.3 電容之計算：圓柱形電容器

選高斯面時，選一個柱面，長L 及半徑 r，端面封閉，如圖所示。柱面與電容器同軸，並包住中心電容柱及電荷q 。

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(2\pi rL),$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}.$$

$$V = \int_-^+ E\,ds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$\boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \qquad \text{(cylindrical capacitor).}}$$

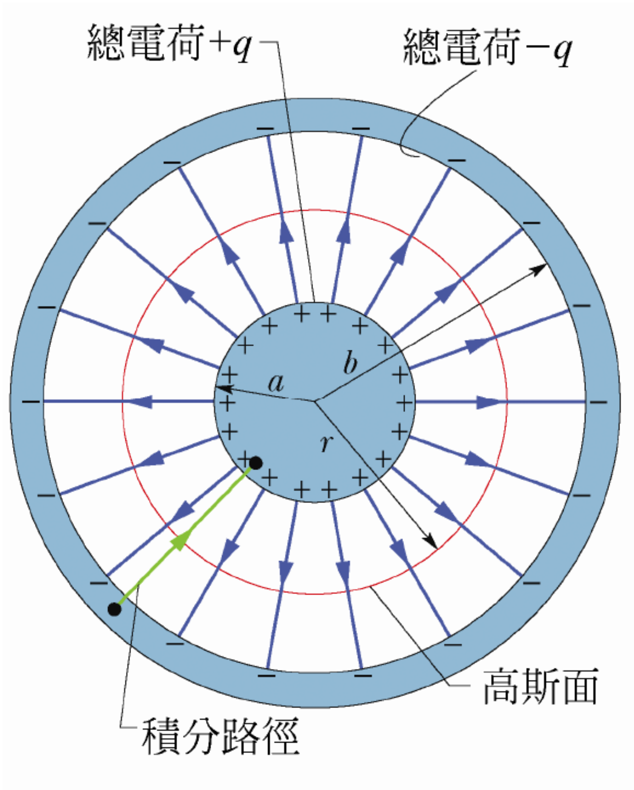


圖 25-6 長圓柱電容器之橫截面，圖中顯示了半徑 r 的高斯面(包含了正電極板)，以及 25-6 式中的徑向積分路徑。此圖也可以代表球形電容器中，通過球心的橫截面。

25.3 電容之計算：球形電容器

$$q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 E(4\pi r^2),$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab},$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \qquad \text{(spherical capacitor).}}$$

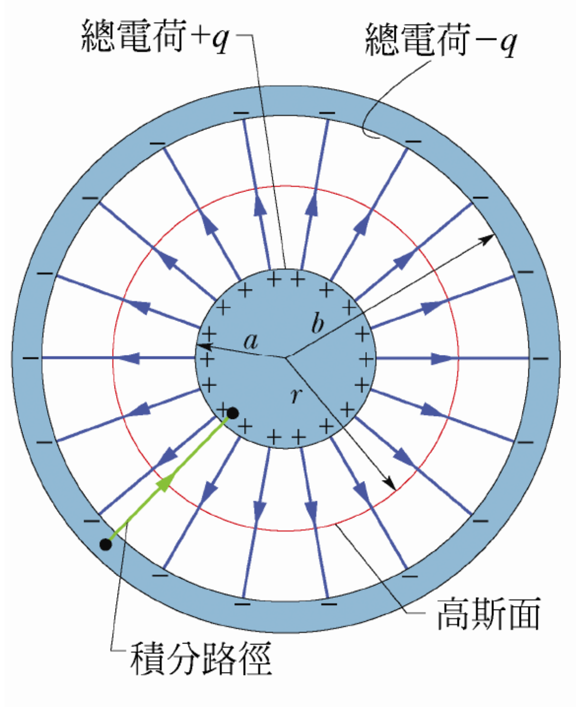


圖 25-6 長圓柱電容器之橫截面，圖中顯示了半徑 r 的高斯面(包含了正電極板)，以及 25-6 式中的徑向積分路徑。此圖也可以代表球形電容器中，通過球心的橫截面。

25.3 電容之計算：孤立球體

延續以上討論，如果我們假設另一塊「看不見的極板」是一個半徑為無限大的導體球殼，則半徑為R 的單一孤立球體亦可指定電容。

從這帶正電孤立導體上所發出的場線畢竟也是有終點的；因此，導體所在之房間的四壁可以等效地作為該無限大球殼。

求電容時，寫成

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}.$$

令b→∞，並用 R 代入 a，

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad \text{(isolated sphere).}}$$

範例 25.1　平行板電容充電

在圖 25-7a 中，接上開關 S 把電容值 $C = 0.25\ \mu\text{F}$ 的未充電電容與 $V = 12\ \text{V}$ 電位差的電池連接起來。電容底板的厚度為 $L = 0.50\ \text{cm}$、表面積為 $A = 2.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$，而且由銅組成，而銅的導電電子的密度是 $n = 8.49 \times 10^{28}$ 電子/m^3。當電容充電時，電子能移到電容板(圖 25-7b)中多深的地方？

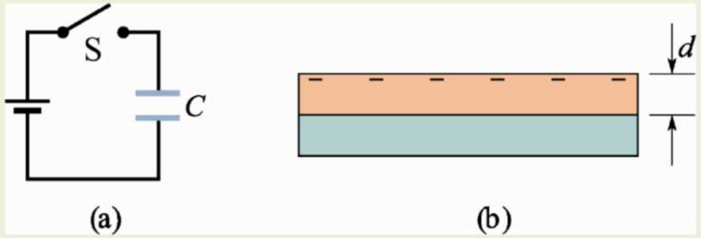


圖 25-7　(a)電池和電容的電路。(b)電容的底板。

關鍵概念

電容板的充電量與電容大小及電容器的跨壓有關，即 25-1 式($q = CV$)。

計算　因底板與電池的負端連接，導電電子便可移動到此板的面上。由式 25-1，該處所收集的電荷量爲

$$q = CV = (0.25 \times 10^{-6}\ F)(12\ \text{V}) = 3.0 \times 10^{-6}\ \text{C}$$

除以 e 可以得到移到此面上的電子數 N：

$$N = \frac{q}{e} = \frac{3.0\times10^{-6}\ \text{C}}{1.602\times10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 1.873\times10^{13}\ \text{個電子}$$

這些電子來自我們尋找的表面積 A 與深度 d 中的體積。因此藉由導電電子的密度(單位體積中的個數)，我們可以寫成

$$n = \frac{N}{Ad} \quad \text{或}$$

$$d = \frac{N}{An} = \frac{1.873\times10^{13}\ \text{electrons}}{(2.0\times10^{-4}\ \text{m}^2)(8.49\times10^{28}\ \text{electrons/ m}^3)} \quad \text{(答)}$$
$$= 1.1\times10^{-12}\ \text{m} = 1.1\text{pm}$$

一般來說，我們說電池提供帶電粒子讓電容充電。但實際上，電池是在導線和電容板上建立了電場，使得非常靠近板子表面的電子移到帶負電的表面。

25.4 電容之並聯及串聯：並聯

•當電位差V 施加於一組並聯電容器兩端時，每個電容器的電位差V都是相同的。此時電容器中儲存的總電荷q 是個別電容器中之電荷總和。

•並聯的一組電容器可以用具有相同總電荷q，相同電位差V 的等效電容器來替代。

$$q_1 = C_1V, \quad q_2 = C_2V, \quad \text{and} \quad q_3 = C_3V.$$

$$\Downarrow$$

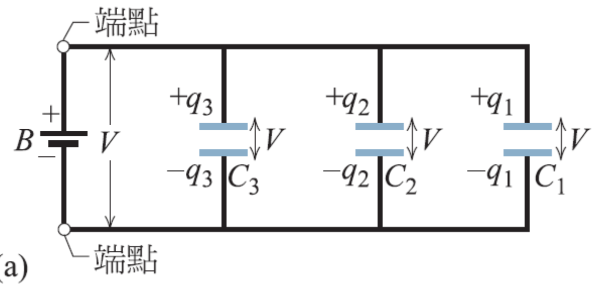
$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V.$$

$$\Downarrow$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3,$$

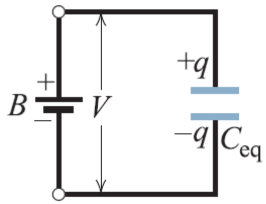
$$\Downarrow$$

$$\boxed{C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j \qquad (n \text{ capacitors in parallel}).}$$



(a)

平行的電容及等效電容具有相同的V



(b)

圖 25-8 (a)三個並聯在一起的電容器與電池 B 相連接，電池在兩端點處維持一電位差 V，此電位差也會出現在每個電容器兩端。(b)具有電容 Ceq 的等效電容器取代了並聯組合。

25.4 電容之並聯及串聯：串聯

•當電位差V 施加在串聯的數個電器兩端時，每一個電容器都會有相同的電荷q。個別電容器上的電位差之總和等於外加的電位差V。

•串聯的電容器可以由一個具有相同電荷q和總電位差V 的等效電容來替代。

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \text{and} \quad V_3 = \frac{q}{C_3}.$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \qquad \text{(}n\text{ capacitors in series).}$$

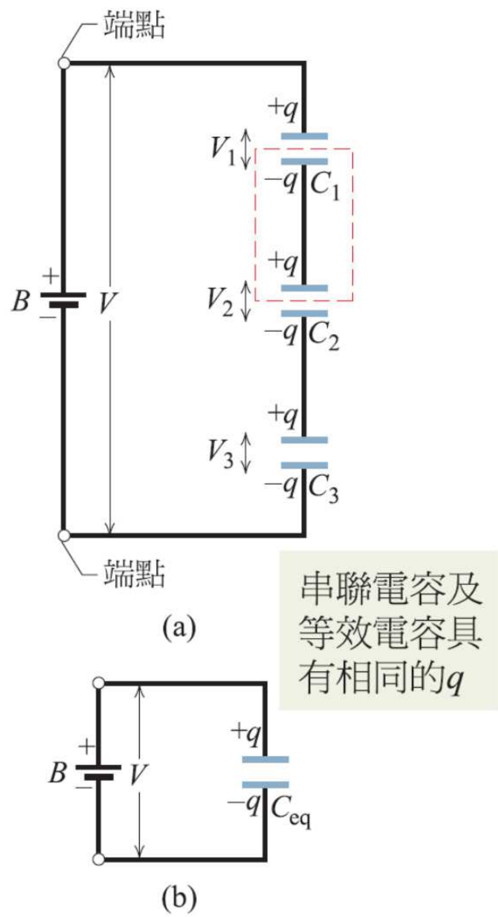


圖 25-9 (a)三個串聯在一起的電容器與電池 B 相連接，電池在串聯組合上下兩端維持電位差 V。(b)電容量 Ceq 的等效電容器取代了串聯組合。

範例 25.2　電容器之並聯及串聯

(a)求出圖 25-10a 中電容器組合之等效電容，組合的外加電位差為 V。假設

$$C_1 = 12.0\mu\text{F} \quad C_2 = 5.30\mu\text{F} \quad C_3 = 4.50\mu\text{F}$$

關鍵概念

任何串聯或並聯的電容器皆可以用等效電容來代替。因此，我們首先要判斷出圖 25-10a 中的電容器是串聯或並聯。

求等效電容　電容器 1 與電容器 3 前後相接，它們是串聯嗎？不是。電位差使得電容器 3 的下極板充電。這使得電容器 3 之上極板的電荷向外移動。然而，這些外移電荷可到達電容器 1 及電容器 2 的下極板。因爲這些外移電荷有一個以上的迴路可走，所以電容器 3 與電容器 1(或電容器 2)並非串聯。

電容器 1 與電容器 2 是並聯嗎？是的。它們的上極板與下極板分別都以導線相連接，在這些上、下極板對之間施加了電位差。因此，電容器 1 與電容器 2 是並聯的，且 25-19 式告訴我們其等效電容 C_{12} 爲

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0\mu\text{F} + 5.30\mu\text{F} = 17.3\mu\text{F}$$

圖 25-10b 中，已將電容器 1 和 2 以其等效電容器代替，稱之爲電容器 12(念爲「一二」，不是「十二」)。(圖 25-10a 和 b 中的接觸點 A 點和 B 點則保持不變)。

電容器 12 與電容器 3 是串聯嗎？再一次利用對串聯電容器的測試，我們可以看到，由電容器 3 上極板移出的電荷會全部到達電容器 12 的下極板，因此電容器 12 與電容器 3 是串聯的。我們可以其等效電容 C_{123} 來代替，如圖 25-10c 所示。由 25-20 式可得

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$$
$$= \frac{1}{17.3\mu\text{F}} + \frac{1}{4.50\mu\text{F}} = 0.280\mu\text{F}^{-1}$$

其中得到

$$C_{123} = \frac{1}{0.280\mu\text{F}^{-1}} = 3.57\mu\text{F} \qquad \text{(答)}$$

(b)電位差 $V = 12.5$ V 施加於圖 25-9a 的輸入端上。求 C_1 上的電荷？

關鍵概念

我們需要利用等效電容，並反向解題來得到個別電容上的電荷。對於「反向解題」的方法我們有兩個技巧：(1)串聯電荷：如同它們的等效電容一樣，串聯的電容都有相同的電荷。(1)並聯電壓：如同它們的等效電容一樣，並聯的電容都有相同的電位差。

反向解題　爲了得到電容器 1 上的電荷 q_1，我們先由等效電容器 123 開始。因爲電位差 V(= 12.5 V)是施加在圖 25-10a 中的三個電容器組合兩端，所以它也施加在圖 25-10d 的電容器 123 兩端。因此，由 25-1 式($q = CV$)可得

$$q_{123} = C_{123}V = (3.57\mu\text{F})(12.5\text{V}) = 44.6\mu\text{C}$$

圖 25-10b 中串聯的電容器 12 和 3 與它們的等效電容器 123(圖 25-10f)有相同的電荷。因此，電容器 12 的電荷爲 $q_{12} = q_{123} = 44.6\ \mu$C。由 25-1 式和圖 25-10g，電容器 12 兩端的電位差必爲

$$V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6\mu\text{C}}{17.3\mu F} = 2.58\text{V}$$

並聯的電容器 1 和 2 如同他們的等效電容器 12 一般，有相同的電位差(圖 25-10h)。因此，電容器 1 的電位差 $V_1 = V_{12} = 2.58$ V，由 25-1 式及圖 25-10i，電容器 1 上的電荷爲

$$q_1 = C_1V_1 = (12.0\mu\text{F})(2.58\text{V}) = 31.0\mu\text{C} \qquad \text{(答)}$$

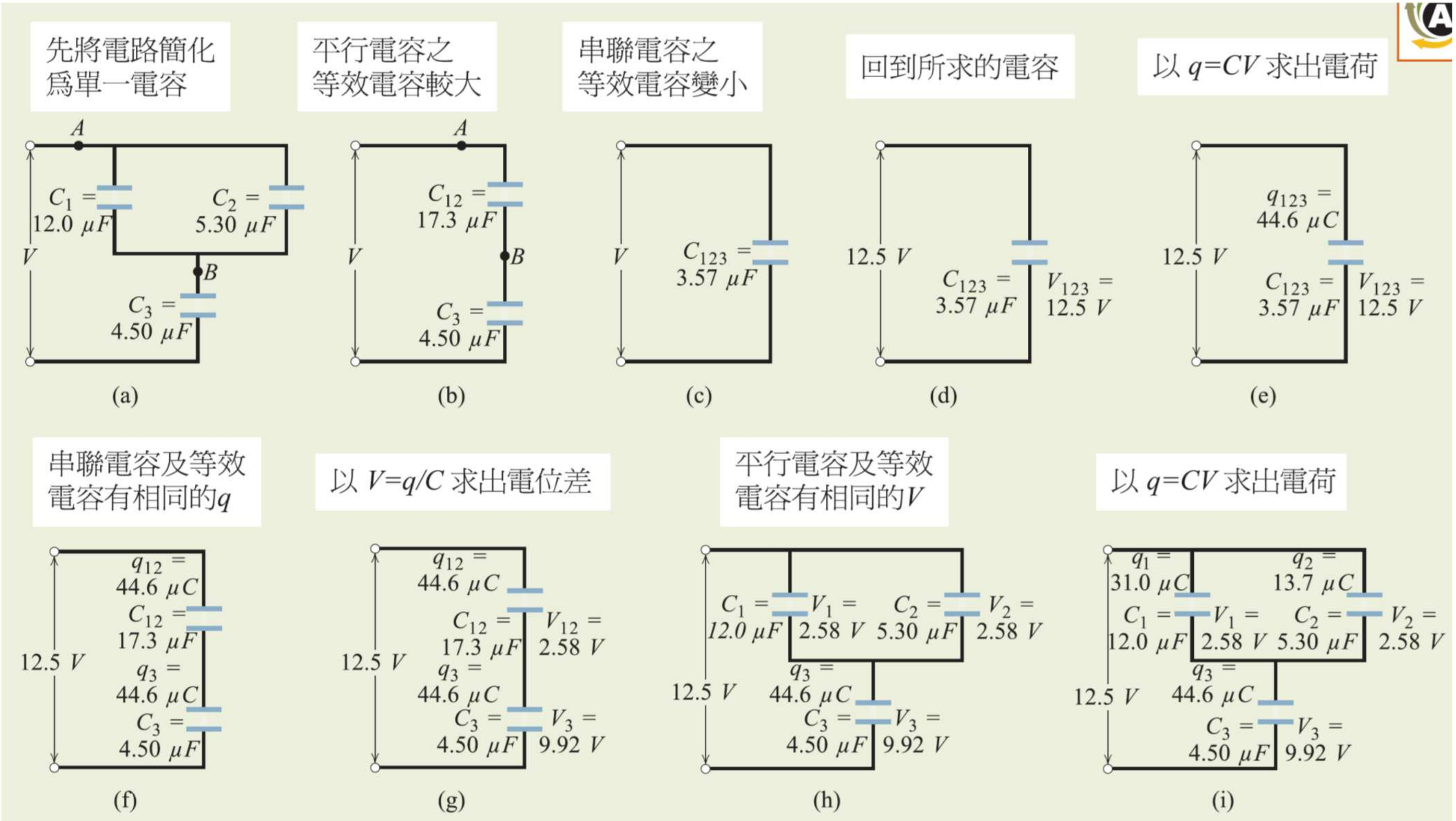


圖 25-10 (a)-(d)三個電容器用等效電容來合併為一個。(e)-(i)逆向來得到電荷。

範例 25.3　由一個電容充電至另一個電容

電容器 1 之 $C_1 = 3.55\ \mu F$，利用 6.30 V 的電池充電至 $V_0 = 6.30$ V。然後將電池移走，把 C_1 接於不帶電的電容器 $C_2 = 8.95\ \mu F$ 上，如圖 25-11 所示。當開關 S 閉合時，電荷從 C_1 流向 C_2，當達到平衡時。求出每個電容器所帶電荷為何？

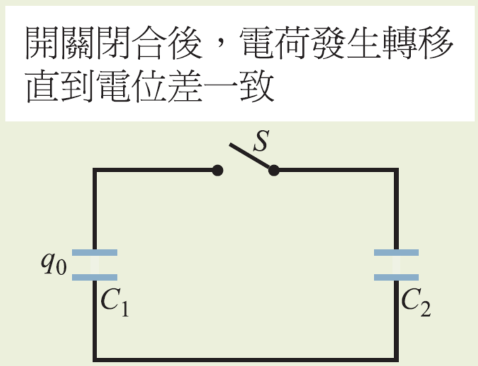


圖 25-11　將電位差 V_0 加於 C_1 後，移走電池。然後讓開關 S 閉合，使原本只在 C_1 上的電荷，現在也被 C_2 分享。

關鍵概念

此題情形與上題不同，因為提供外加電位的裝置，如電池，不再用來維持電容器組合的電位。開關 S 閉合後，電容器 2 上的電位僅由電容器 1 來提供，且其電位會減小。因此，圖 25-11 中的電容並非串聯，且雖然它們畫成並聯形式，但在此情況下也非並聯。

當電容器 1 上的電位減少時，電容器 2 上的電位便增加。當兩個電位相等時，平衡便達到，這是由於兩電容器的電場板間沒有電位差時，就不會有可以移動導電電子的電場存在於連接線上。然後，在電容器 1 上原有的電荷將由這兩電容器共享。

計算　一開始，當電容器 1 被連接上電池時，它所獲得的電荷可由 25-1 式算出，

$$q_0 = C_0V_0 = (3.55\times10^{-6}\,\text{F})(6.30\,\text{V})$$
$$= 22.365\times10^{-6}\,\text{C}$$

當圖 25-11 的 S 開關關閉而使電容器 1 開始對電容器 2 充電時，電容器 1 上的電位和電荷開始減少而電容器 2 的則開始增加，直到

$$V_1 = V_2 \quad (平衡)$$

由 25-1 式，我們可以再將其寫成

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad (平衡)$$

因爲總電荷不可能像魔法地改變，因此在電荷移轉後其總量必須是

$$q_1 + q_2 = q_0 \quad (電荷守恆)$$

所以 $q_2 = q_0 - q_1$。

我們現在可以再將第二個平衡式寫爲

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0 - q_2}{C_2}$$

將已有的資料帶入以解出 q_1，我們發現

$$q_1 = 6.35\ \mu\text{C} \qquad (答)$$

原有電荷(q_0 = 22.365 μC)剩下的部分必定在電容器 2 上：

$$q_2 = 16.0\ \mu\text{C} \qquad (答)$$

25.5 儲存在電場中的能量

一充電電容器的電位能，可被視爲儲存於兩極板間的電場內。

假設在某一時刻，電荷q’已經自一極板移至另一極板。此時兩極板間之電位差V’為q’/C。若欲再轉移dq’的額外電荷至極板上，則所需增加之功為，

$$dW = V'\,dq' = \frac{q'}{C}\,dq'.$$

電容器充電至電荷值為q 時，所需作之功為

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int_0^q q'\,dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

此功以位能的形式儲存於電容器中，所以

$$U = \frac{q^2}{2C} \qquad \text{(potential energy).}$$

也可表示為：

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 \qquad \text{(potential energy).}$$

25.5 儲存在電場中的能量：能量密度

在平行板電容器中，如果忽略邊緣效應，則兩極板間各點電場之值均相同。所以能量密度*u*——即兩板間單位體積內儲存之能量，亦應為均勻。將能量除以兩極板間之體積Ad，便可以得到u。

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad}.$$

但因($C = \varepsilon_0 A/d$)，所以

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2.$$

然而，($E=-\Delta V/\Delta s$)，V/d 等於電場大小 E。因此，

$$\boxed{u = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \text{(energy density).}}$$

範例 25.4　電場的位能與能量密度

半徑 $R = 6.85$ cm 的孤立導體球帶有電荷 $q = 1.25$ nC，試求

(a)此帶電導體之電場內所儲存的電能為若干？

關鍵概念

(1)孤立球體的電容可以用 25-18 式($C = 4\pi\varepsilon_0 R$)表示。(2)根據 25-21 式($U = q^2/2C$)，儲存在電容器中的能量 U 由電容器上之電荷 q 及其電容 C 決定。

計算　將 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ 代入 25-21 式，我們可以得到

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{(1.25\times10^{-9}\,C)^2}{(8\pi)(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m})(0.0685\,\mathrm{m})}$$

$$= 1.03\times10^{-12}\,\mathrm{J} = 103\,\mathrm{nJ} \qquad \text{(答)}$$

(b)球表面上的能量密度為多少？

關鍵概念

根據 25-25 式($u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$)，電場中的能量密度 u 由電場的大小 E 決定。

計算　在這裡，首先我們必須求出球面上的 E，這可以由 23-15 式計算得到：

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

因此能量密度爲

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$

$$= \frac{(1.25\times10^{-9}\,\mathrm{C})^2}{(32\pi^2)(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(0.0685\,\mathrm{m})^4} \qquad \text{(答)}$$

$$= 2.54\times10^{-5}\,\mathrm{J/m^3} = 25.4\,\mu\mathrm{J/m^3}$$

25.6 具有介電質之電容器

在填滿介電常數爲 κ 之介電質的空間中，所有含有導電係數 ε_0 之靜電公式要修正成 ε_0 換成 $\kappa\varepsilon_0$。

介電質是一種絕緣材質如礦油或塑膠，並能以一數值κ表示，稱為介電常數。

某些材料，例如鈦酸鍶可以增加兩個數量級的幅度。

加入介電質的另一個效應是替兩極板間所能承受的電位差設定一上限值Vmax，稱為崩潰電位。當超過此上限值時，介電質會被破壞，而在兩極板間形成通路。每一種介電質都具有介電強度特性，即介電質被破壞前所能忍受的最大電場。表25-1 中列出了一些材料的介電強度值。

25.6 具有介電質之電容器

表 25-1

介電質之特性 [a]

材料	介電常數 κ	介電強度 (kV/mm)
空氣(1atm)	1.00054	3
聚苯乙烯	2.6	24
紙	3.5	16
變壓器用油	4.5	
耐熱玻璃	4.7	14
紅色雲母片	5.4	
瓷	6.5	
矽	12	
鍺	16	
酒精	25	
水(20℃)	80.4	
水(25℃)	78.5	
鈦陶瓷	130	
鈦酸鍶	310	8
眞空 $\kappa = 1$		

[a] 除水以外，均為在室溫下測量之結果。

範例 25.5　當介電質加入電容的功與能量

一平行板電容器 $C = 13.5$ pF，兩極板間以電池施加電位差 $V = 12.5$ V，進行充電。當充電用的電池移走後，在兩極板間插入一瓷板($\kappa = 6.50$)。

(a)試求在插入瓷板前位能為多少？

關鍵概念

我們可將電容器的電位能 U_i 與電容 C 以及電位 V(由 25-22 式)，或電荷 q(由 25-21 式)關聯起來：

$$U_i = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}$$

計算 由 25-22 式及初電位 V(=12.5 V)可得到最初位能爲

$$U_i = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}\left(13.5\times10^{-12}\ \mathrm{F}\right)(12.5\ \mathrm{V})^2$$
$$= 1.055\times10^{-9}\ \mathrm{J} = 1055\ \mathrm{pJ} \approx 1100\ \mathrm{pJ} \qquad \text{(答)}$$

(b)在插入瓷板後，位能為多少？

關鍵概念

因爲電池已經被移走了，當介電質插入時，電容器便沒辦法再被充電。然而，電位的確改變了。

計算 因此，我們現在必須使用 25-21 式(與 q 相關)來寫出最後的電位能 U_f，但是現在該瓷板是在電容器裡面，所以其電容爲 κC。可得

$$U_f = \frac{q^2}{2\kappa C} = \frac{U_i}{\kappa} = \frac{1055\ \mathrm{pJ}}{6.50} \qquad \text{(答)}$$
$$= 162\ \mathrm{pJ} \approx 160\ \mathrm{pJ}$$

當瓷板被插入時，電位能會減少一個 κ 的因子

原則上，這個「消失」的能量會被將瓷板放入電容器中的人所感受到。電容器會對瓷板施以一拉扯的力，並對它作功，大小爲

$$W = U_i - U_f = (1055 - 162)\ \mathrm{pJ} = 893\ \mathrm{pJ}$$

如果瓷板可被允許在極板間作無限制的滑動且無摩擦力存在，則瓷板會在兩板間以一固定的力學能 893 pJ 作前後的來回震盪，且這個系統的能量會在瓷板的移動動能與儲存在電場中的位能間，不停地作轉換。

25.7 介電質：原子觀點

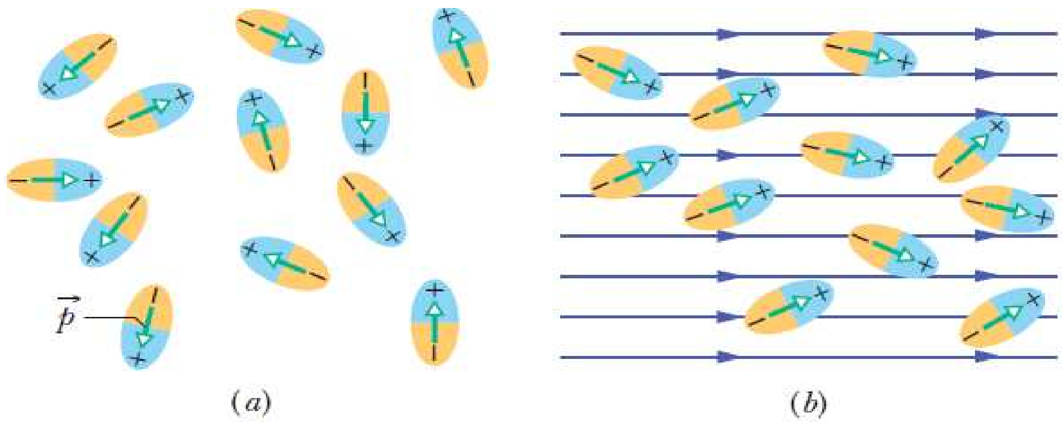


圖 25-14 (a)有永久電偶極矩之分子，圖中顯示在無外部電場時分子凌亂排列。(b)施以電場，將使偶極部分對齊。熱擾動會使此排列的情形不完全整齊。

1. 極性介電質：有些介電質的分子具有永久電偶極矩，例如水。在這類叫做極性介電質的材料中，電偶極有沿外部電場排列的趨勢，如圖25-14 所示。由於分子的隨機熱運動的緣故，分子不斷地推擠對方，此排列並不完全整齊，但是當外加電場強度增加或溫度降低時，推擠會減少，其整齊度就會增大。電偶極的排列會產生一個與外加電場方向相反，但強度較弱的電場。

2. 非極性介電質：不管分子是否具有永久電偶極矩，若將其置於外部電場時均可因感應而獲得電偶極矩。在第24-8 節(見圖24-11)中已知，外部電場會使分子「拉長」，而令正、負電荷中心有稍微分開的趨勢。

25.8 介電質與高斯定律

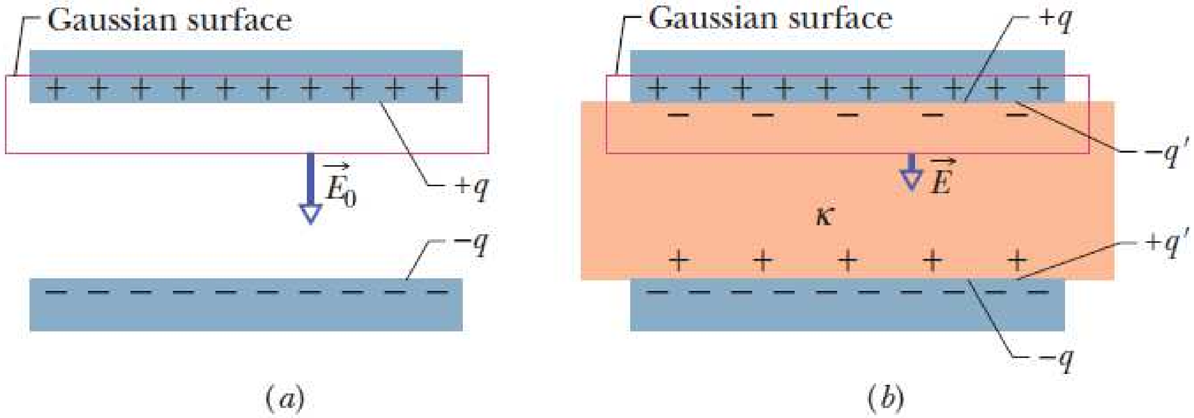


圖 25-16 (a)沒有介電質的平行板電容器(b)插入介電質厚片後的同一電容器。假設在(a)、(b)中，板上之電荷同為 q。

在圖25-16a 所描述沒有介電質的情況中，我們可以找出極板間的電場$E0$，如同我們在圖25-5中所做的：將上方極板中的電荷+q 以高斯面包圍起來，並應用高斯定律。令E0 表示電場的大小，則

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 EA = q, \quad \Longrightarrow \quad E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}.$$

在圖25-16b 中，當插入介電質後，我們可用相同的高斯面求出極板間(且在介電質中)的電場。然而，此時高斯面包含了兩種電荷：它仍圍住了上方極板中的+q 電荷，同時也圍住了在介電質上表面的感應電荷-q’。在導體極板上的電荷稱之為自由電荷，因為若我們改變極板電位，它便會移動其位置；在介電質表面的感應電荷，因無法離開表面，所以不是自由電荷。

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 EA = q - q', \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A}.$$

介電質之效應會使電場E0 減少為原來的1/k，亦即 $E = \dfrac{E_0}{\kappa} = \dfrac{q}{\kappa \varepsilon_0 A}.$

因為 $q - q' = \dfrac{q}{\kappa}.$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \qquad \text{(Gauss' law with dielectric).}}$$

25.8 介電質與高斯定律

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \qquad \text{(Gauss' law with dielectric).}$$

1. 通量積分現為$\kappa \boldsymbol{E}$，而非僅 $\boldsymbol{E}$。上式可寫為 $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q.$ 。D為電位移。

2. 高斯面內所包含之電荷q，現在只取自由電子而已。在25-36 式的右邊，故意把感應的表面電荷略去不計，而整個表面電荷的效應，則由加到左邊的常數κ所涵蓋

3. 3.25-36 式與高斯定律的原始形式(即23-7 式)間的差異，僅在於後者的ε0 被κε0 所取代。我們將κ 放進到25-36 式的積分號內以便顧及x 在高斯面上可能不為常數之情形。

範例 25.6　電容間隙填入部分的介電質

圖 25-17 所示為一平行板電容器，其面積為 A，極板間距為 d。兩極板連接電池的板間電位差為 V_0。若移開充電電池，然後在兩極板間插入厚度為 b，介電常數為 κ 的介電質，如圖所示假設 $A = 115\ \text{cm}^2$，$d = 1.24\ \text{cm}$，$V_0 = 85.5\ V$，$b = 0.780\ \text{cm}$ 和 $\kappa = 2.61$。

(a)插入介電質厚片之前的電容 C_0 為多少？

計算　由 25-9 式可得

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85\times10^{-12}\ \text{F/m})(115\times10^{-4}\ \text{m}^2)}{1.24\times10^{-2}\ \text{m}} \qquad \text{(答)}$$
$$= 8.21\times10^{-12}\ \text{F} = 8.21\ \text{pF}$$

(b)在極板上的自由電荷為多少？

計算　由 25-1 式可得

$$q = C_0V_0 = (8.21\times10^{-12}\ \text{F})(85.5\ \text{V}) \qquad \text{(答)}$$
$$= 7.02\times10^{-10}\ \text{C} = 702\ \text{pC}$$

因爲在插入介電質之前已經把電池移開，自由電荷之數目維持不變。

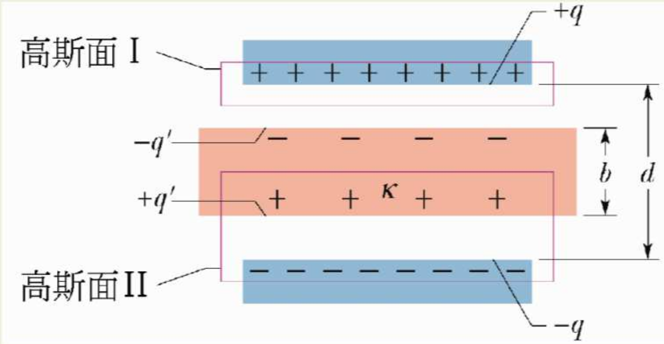


圖 25-17 平行板電容器內包含了一塊只能填充其部分空間的介電質厚片。

(c)極板與介電質厚片之間空隙處的電場 E_0 為多少？

關鍵概念

我們需要應用 25-36 式的高斯定律到圖 25-17 的高斯面 I。

計算 此高斯面通過間隙，所以僅包圍了電容器上極板的自由電荷。電場僅穿越高斯面的底部。因為面積向量 $d\vec{A}$ 及場向量 $\vec{E}_0$ 均指向下，所以 25-36 式中的點積變成

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = E_0 dA \cos 0° = E_0 dA$$

則 25-36 式會變成

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 \oint dA = q$$

現在此積分單純就是極板面積 A。所以可知

$$\varepsilon_0 \kappa E_0 A = q$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A}$$

我們須令 $\kappa = 1$，這是因為高斯面 I 並沒有通過介電質。所以，我們有

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{7.02 \times 10^{-10} C}{(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m})(1)(115 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2})} \quad (答)$$

$$= 6900\ \mathrm{V/m} = 6.90\ \mathrm{kV/m}$$

注意，因高斯面 1 在圖 25-17 中所包圍的電荷量並未改變，所以當介電質厚片插入時，E_0 的值並未改變。

(d)介電質厚片內之電場 E_1 為多少？

關鍵概念

現在我們對圖 25-17 中的高斯面 II 應用 25-36 式。

計算　此高斯面包含自由電荷$-q$ 及感應電荷$+q'$，但在我們使用 25-36 式時不考慮後項。可得：

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\varepsilon_0 \kappa E_1 A = -q \qquad (25\text{-}37)$$

這個方程式的第一個減號來自內積 $\vec{E}_1 \cdot d\vec{A}$，其沿著高斯面的頂端，這是因為電場向量 $\vec{E}_1$ 現在指向下方，而面積向量 $d\vec{A}$ (一個封閉高斯面由內對外的點)指向上方的緣故。而兩個向量間為 180 度，則點積為負。現在 $\kappa = 2.61$。因此，25-37 式告訴我們

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{\varepsilon_0}{\kappa} = \frac{6.90\,\mathrm{kV/m}}{2.61} = 2.64\,\mathrm{kV/m} \qquad \text{(答)}$$

(e)當插入介電質後，兩極板間的電位差 V 為多少？

關鍵概念

我們利用積分來找出 V，積分路徑是由下極板至上極板的直線。

計算　在介電質內，其積分路徑長度為 b，電場為 E_1。在介電質上方與下方間的空隙之積分路徑總長度為 $d-b$，電場則為 E_0。由 25-6 式得到

$$\begin{aligned} V &= \int_-^+ E\,ds = E_0(d-b) + E_1 b \\ &= (6900\,\mathrm{V/m})(0.0124\,\mathrm{m} - 0.00780\,\mathrm{m}) \\ &\quad + (2640\,\mathrm{V/m})(0.00780\,\mathrm{m}) \\ &= 52.3\,\mathrm{V} \end{aligned} \qquad \text{(答)}$$

較原來的電位差 85.5 V 小。

(f)插入介電質後，電容為多少？

關鍵概念

由 25-1 式可知，電容 C 與自由電荷 q 和電位差 V 有關。

計算　利用(b)中的 q 與(e)中的 V，可得

$$C = \frac{q}{V} = \frac{7.02\times10^{-10}\,C}{52.3\,\mathrm{V}} = 1.34\times10^{-11}\,\mathrm{F} = 13.4\,\mathrm{pF} \qquad \text{(答)}$$

比原先 8.21 pF 的電容大。

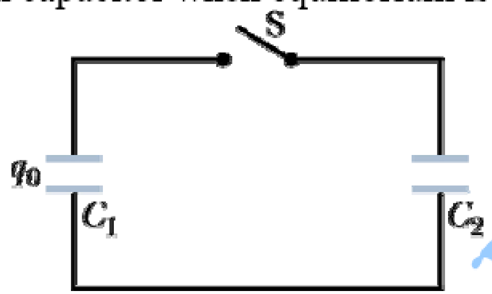
Fundamentals of Physics, 8th Ed
Principle of Physics, 9th Ed
Halliday & Resnic

8th Ed【CH25】Capacitors and Capacitance
9th Ed【CH25】Capacitance

8th Ed：Homework of Chapter 25：
1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 20, 27, 31, 33, 35, 37, 41, 43, 45, 49, 51, 53, 55

8th Ed【Sample Problem 25-3】

Capacitor 1, with $C_1 = 3.55\mu F$, is charged to a potential difference $V_0 = 6.3V$, using a 6.30 V battery. The battery is then removed, and the capacitor is connected as in Fig. 25- 11 to an uncharged capacitor 2, with $C_2 = 8.95\mu F$ .When switch S is closed, charge flows between the capacitors. Find the charge on each capacitor when equilibrium is reached.



（圖 25-11）

<解>：$q_0 = C_1 V_0 = (3.55\mu F)(6.3V) = 22.365\mu C$

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q_1 + q_2 = q_0$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0 - q_1}{C_2}$$

$$\Rightarrow \; q_1 = \frac{C_1 q_0}{C_1 + C_2} = \frac{(3.55)(22.365)}{3.55 + 8.95} = 6.35\mu C$$

$$q_2 = q_0 - q_1 = 22.365 - 6.35 = 16\mu C$$

8th Ed【Sample Problem 25-6】

A parallel-plate capacitor whose capacitance C is 13.5pF is charged by battery to a potential difference $V = 12.5V$ between its plates. The charging battery is now disconnected, and a porcelain slab ($\kappa = 6.50$) is slipped between the plates. (a) What is the potential energy of the capacitor before the slab is inserted? (b) What is the potential energy of the capacitor-slab device after the slab is inserted?

<解>：(a) $U_i = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(13.5\times10^{-12}F)(12.5V)^2 = 1.055\times10^{-9}J = 1055\,pJ \approx 1100\,pJ$

(b) $U_f = \frac{q^2}{2\kappa C} = \frac{U_i}{\kappa} = \frac{1055\,pJ}{6.5} = 162\,pJ \approx 160\,pJ$

$W = U_i - U_f = (1055-162)\,pJ = 893\,pJ$

8th Ed【Problem 25-1】: 9th Ed【Problem 25-1】

The two metal objects in Fig. 25-25 have net charges of $+70\,pC$ and $-70\,pC$, which result in a $20V$ potential difference between them. (a) What is the capacitance of the system? (b) If the charges are changed to $+200\,pC$ and $-200\,pC$, what does the capacitance become? (c) What does the potential difference become?

兩金屬物體，如圖 25-25，分別帶有淨電荷爲$+70\,pC$和$-70\,pC$，兩者之間的電位爲 20V，（a）系統電容爲何？（b）如果帶電量變爲$+200\,pC$和$-200\,pC$，電容又變爲多少？（c）電位差變爲何？

（圖 25-25）

<解>：(a) The capacitance of the system is $C=\dfrac{q}{\Delta V}=\dfrac{70\,\text{pC}}{20\,\text{V}}=3.5\,\text{pF}$.

(b) The capacitance is independent of q; it is still 3.5 pF.

(c) The potential difference becomes $\Delta V=\dfrac{q}{C}=\dfrac{200\,\text{pC}}{3.5\,\text{pF}}=57\,\text{V}$.

8th Ed【Problem 25-5】: 9th Ed【Problem 25-3】

A parallel-plate capacitor has circular plates of 8.20 cm radius and 1.30 mm separation. (a) Calculate the capacitance. (b) What charge will appear on the plates if a potential difference of 120 V is applied?

平行電容板，圓板半徑 8.2cm，相距 1.3mm，（a）計算電容值（b）如果電位爲 120V，問電荷量爲多少？

<解>：(a) The capacitance of a parallel-plate capacitor is given by $C=\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$, where A is the area of each plate and d is the plate separation. Since the plates are circular, the plate area is $A=\pi R^2$, where R is the radius of a plate. Thus,

$$C=\frac{\varepsilon_0\pi R^2}{d}=\frac{\left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}\right)\pi\left(8.2\times10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2}{1.3\times10^{-3}\ \mathrm{m}}=1.44\times10^{-10}\ \mathrm{F}=144\mathrm{pF}.$$

(b) The charge on the positive plate is given by $q=CV$, where V is the potential difference across the plates. Thus, $q=(1.44\times10^{-10}F)(120V)=1.73\times10^{-8}C=17.3nC$

8th Ed【Problem 25-7】: 9th Ed【Problem 25-5】

What is the capacitance of a drop that results when two mercury spheres, each of radius $R = 2mm$, merge?

兩個球型汞水滴，每一個半徑爲$R = 2mm$ ，電容值爲何？

<解>：Assuming conservation of volume, we find the radius of the combined spheres, then use $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ to find the capacitance. When the drops combine, the volume is doubled. It is then $V = 2(\frac{4\pi}{3})R^3$. The new radius R' is given by

$$\frac{4\pi}{3}(R')^3 = 2\frac{4\pi}{3}R^3 \quad \Rightarrow \quad R' = 2^{1/3}R.$$

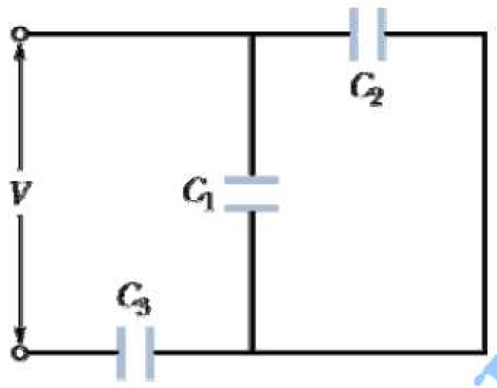
The new capacitance is $C' = 4\pi\varepsilon_0 R' = 4\pi\varepsilon_0 2^{1/3} R = 5.04\pi\varepsilon_0 R.$

With $R = 2mm$, we obtain $C = 5.04\pi\left(8.85\times10^{-12}\ \text{F/m}\right)\left(2.00\times10^{-3}\ \text{m}\right) = 2.80\times10^{-13}\ \text{F}$.

8th Ed【Problem 25-9】: 9th Ed【Problem 25-11】

In Fig. 25-29, find the equivalent capacitance of the combination. Assume that $C_1 = 10\mu F$, $C_2 = 5\mu F$, and $C_3 = 4\mu F$.

圖 25-29，求等效電容，假設 $C_1 = 10\mu F$ 、$C_2 = 5\mu F$ 和 $C_3 = 4\mu F$ 。



（圖25-29）

<解>：$C_{1+2} = C_1 + C_2$（電容並聯）

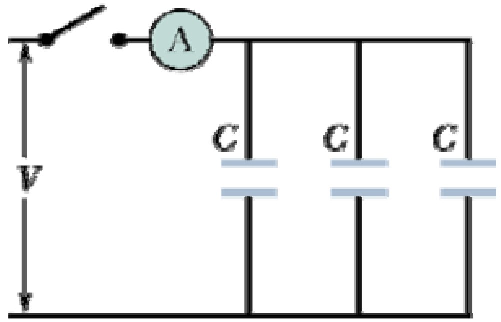
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{1+2}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$C_{eq} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{(10.0\,\mu\text{F} + 5.00\,\mu\text{F})(4.00\,\mu\text{F})}{10.0\,\mu\text{F} + 5.00\,\mu\text{F} + 4.00\,\mu\text{F}} = \frac{60}{19}\mu F = 3.16\,\mu\text{F}$$

8th Ed【Problem 25-11】: 9th Ed【Problem 25-9】

Each of the uncharged capacitors in Fig. 25-30 has a capacitance of $25\mu F$. A potential difference of $V = 4200V$ is established when the switch is closed. How many coulombs of charge then pass through meter A?

圖 25-30M，每一個還沒充電的電容都是 $25\mu F$，一電動勢 $V = 4200V$ 連接到上面，開關關閉，問 A 儀器上可以量到多少電荷？



（圖 25-30）

<解>： $C_{eq} = 3C$

$$q = C_{eq}V = 3CV = 3(25.0\,\mu\text{F})(4200\,\text{V}) = 0.315\,\text{C}.$$

8th Ed【Problem 25-13】: 9th Ed【Problem 25-17】

In Fig. 25-29, a potential difference of $V = 100V$ is applied across a capacitor arrangement with capacitances $C_1 = 10\mu F$, $C_2 = 5\mu F$, and $C_3 = 4\mu F$. If capacitor 3 undergoes electrical breakdown so that it becomes equivalent to conducting wire, what is the increase in (a) the charge on capacitor 1 and (b) the potential difference across capacitor 1?

圖 25-29，三個電容 $C_1 = 10\mu F$ 、$C_2 = 5\mu F$ 和 $C_3 = 4\mu F$ ，其電位差 $V = 100V$ 。如果電容器 3 故障，使得等同於導線，問（a）電容器 1 增加的電荷有多少？（b）電容器 1 兩端的電位差爲何？

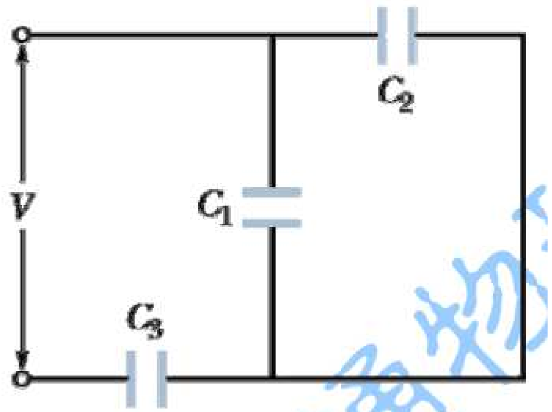
<解>： $C_{eq} = \dfrac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = \dfrac{(10.0\,\mu\text{F} + 5.00\,\mu\text{F})(4.00\,\mu\text{F})}{10.0\,\mu\text{F} + 5.00\,\mu\text{F} + 4.00\,\mu\text{F}} = \dfrac{60}{19}\mu F = 3.16\,\mu\text{F}$

(a) and (b) The original potential difference V_1 across C_1 is

$$V_1 = \frac{C_{eq}V}{C_1 + C_2} = \frac{(3.16\,\mu\text{F})(100.0\,\text{V})}{10.0\,\mu\text{F} + 5.00\,\mu\text{F}} = 21.1\text{V}.$$

Thus $\Delta V_1 = 100V - 21.1V = 78.9V$ and

$$\Delta q_1 = C_1 \Delta V_1 = (10\mu F)(78.9V) = 7.89 \times 10^{-4} C$$



（圖 25-29）

8^{th} Ed【Problem 25-15】: 9^{th} Ed【Problem 25-13】

A 100 pF capacitor is charged to a potential difference of 50 V, and the charging battery is disconnected. The capacitor is then connected in parallel with a second (initially uncharged) capacitor. If the potential difference across the first capacitor drops to 35 V, what is the capacitance of this second capacitor?

1 個 100pF 的電容充電到 50V，然後移開充電電池。再將此電容與另一個一開始不帶電的電容並聯。如果第一個電容電位差下降到 35 伏特，問第二個電容大小爲何？

<解>：$q = C_1 V_0$

$$q_1 = C_1 V$$

$$q_2 = q - q_1 = C_1 (V_0 - V)$$

$$C_2 = \frac{q_2}{V} = \frac{V_0 - V}{V} C_1 = \frac{50\,\text{V} - 35\,\text{V}}{35\,\text{V}} (100\,\text{pF}) = 43\,\text{pF}.$$

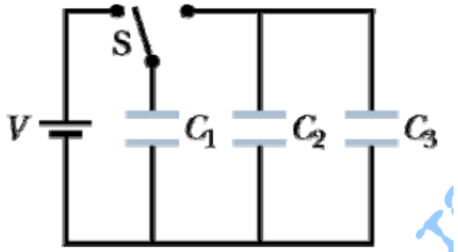
8th Ed【Problem 25-20】: 9th Ed【Problem 25-22】★

In Fig. 25-36, $V=10V$, $C_1=10\mu F$, and $C_2=C_3=20\mu F$. Switch S is first thrown to the left side until capacitor 1 reaches equilibrium. Then the switch is thrown to the right. When equilibrium is again reached, how much charge is on capacitor 1?

如圖 25-36，$V=10V$, $C_1=10\mu F$, and $C_2=C_3=20\mu F$。S 開關一開始在左邊，直到電容 1 達到平衡。再將 S 開關轉到右邊，當再次平衡時，電容 1 有多少電荷？

<解>：We do not employ energy conservation since, in reaching equilibrium, some energy is dissipated either as heat or radio waves. Charge is conserved; therefore, if $Q=C_1V_{bat}=100\mu C$, and q_1, q_2 and q_3 are the charges on C_1, C_2 and C_3 after the switch is thrown to the right and equilibrium is reached, then $Q=q_1+q_2+q_3$.

Since the parallel pair C_2 and C_3 are identical, it is clear that $q_2=q_3$. They are in parallel with C_1 so that $V_1=V_3$, or $\dfrac{q_1}{C_1}=\dfrac{q_3}{C_3}$



（圖 25-36）

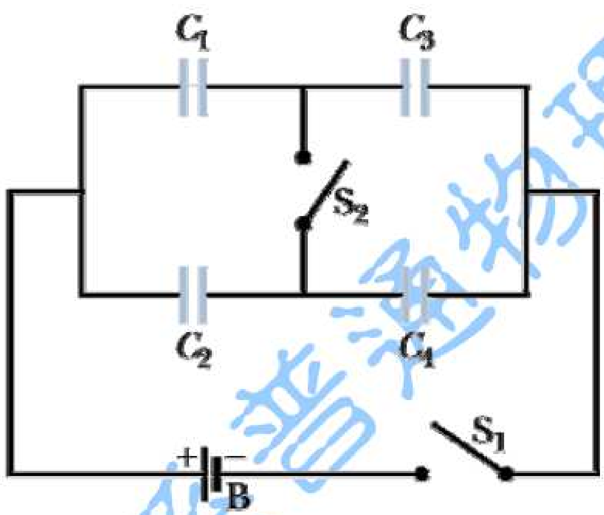
which leads to $q_1=\dfrac{q_3}{2}$. Therefore, $Q=(\dfrac{q_3}{2})+q_3+q_3=\dfrac{5q_3}{2}$

which yields $q_3=\dfrac{2Q}{5}=\dfrac{2(100\ \mu C)}{5}=40\ \mu C$ and consequently $q_1=\dfrac{q_3}{2}=20\mu C$

8th Ed【Problem 25-27】: 9th Ed【Problem 25-27】

Figure 25-43 shows a 12.0 V battery and four uncharged capacitors of capacitances $C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 2\mu F$, $C_3 = 3\mu F$, and $C_4 = 4\mu F$. If only switch S1 is closed, what is the charge on (a) capacitor 1, (b) capacitor 2, (c) capacitor 3, and (d) capacitor 4? If both switches are closed, what is the charge on (e) capacitor 1, (f) capacitor 2, (g) capacitor 3, and (h) capacitor 4?

圖 25-43 顯示了一個 12 伏特的電池和 4 個不帶電的電容，$C_1 = 1\mu F$，$C_2 = 2\mu F$，$C_3 = 3\mu F$，和 $C_4 = 4\mu F$。如果只有 S1 開關關閉，問（a）電容器 1（b）電容器 2（c）電容器 3（d）電容器 4 的帶電量為何？如果 S1 和 S2 開關都關閉，問（e）電容器 1（f）電容器 2（g）電容器 3（h）電容器 4 的帶電量為何？



（圖 25-43）

<解>：

(a)~(d)：$V_{C1}+V_{C3}=V_{C2}+V_{C4}=12V$

$$q_1=q_3;\ q_2=q_4$$

$$\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_3}{C_3}=\frac{q_2}{C_2}+\frac{q_4}{C_4}=12V \Rightarrow q_1\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)=12V$$

$$\Rightarrow q_1=\frac{C_1C_3}{C_1+C_3}(12V)$$

同理：$q_2=\dfrac{C_2C_4}{C_2+C_4}(12V)$

(a) In this situation, capacitors 1 and 3 are in series, which means their charges are necessarily the same:

$$q_1=q_3=\frac{C_1C_3V}{C_1+C_3}=\frac{(1.00\,\mu\text{F})\,(3.00\,\mu\text{F})\,(12.0\text{V})}{1.00\,\mu\text{F}+3.00\,\mu\text{F}}=9.00\,\mu\text{C}.$$

(b) Capacitors 2 and 4 are also in series:

$$q_2=q_4=\frac{C_2C_4V}{C_2+C_4}=\frac{(2.00\,\mu\text{F})\,(4.00\,\mu\text{F})\,(12.0\text{V})}{2.00\,\mu\text{F}+4.00\,\mu\text{F}}=16.0\,\mu\text{C}.$$

(c) $q_3 = q_1 = 9.00\,\mu\text{C}$.

(d) $q_4 = q_2 = 16.0\,\mu\text{C}$.

(e)~(h)：$V_{C1} = V_{C2}$，$V_{C3} = V_{C4}$

$$V_{C1} + V_{C3} = 12V$$

$$q_{C1+C2} = q_{C3+C4} \Rightarrow (C_1 + C_2)V_{C1} = (C_3 + C_4)V_{C3}$$

$$V_{C1} + \frac{C_1 + C_2}{C_3 + C_4}V_{C1} = 12V \Rightarrow V_{C1} = \frac{C_3 + C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}(12V)$$

$$q_1 = C_1 V_{C1}$$

(e) With switch 2 also closed, the potential difference V_1 across C_1 must equal the potential difference across C_2 and is

$$V_1 = \frac{C_3 + C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}V = \frac{(3.00\,\mu\text{F} + 4.00\,\mu\text{F})(12.0\,\text{V})}{1.00\,\mu\text{F} + 2.00\,\mu\text{F} + 3.00\,\mu\text{F} + 4.00\,\mu\text{F}} = 8.40\,\text{V}.$$

Thus, $q_1 = C_1 V_1 = (1\mu F)(8.4V) = 8.4\mu C$

(f) Similarly, $q_2 = C_2 V_1 = (2\mu F)(8.4V) = 16.8\mu C$

(g) $q_3 = C_3(V - V_1) = (3\mu F)(12V - 8.4V) = 10.8\mu C$

(h) $q_4 = C_4(V - V_1) = (4\mu F)(12V - 8.4V) = 14.4\mu C$

8th Ed【Problem 25-31】: 9th Ed【Problem 25-29】

What capacitance is required to store an energy of $10kW \cdot h$ at a potential difference of 1000 V?

需要多大的電容才能夠儲存能量$10kW \cdot h$，使其電位差爲 1000 伏特？

<解>：The energy stored by a capacitor is given by $U = \frac{1}{2}CV^2$, where V is the potential difference across its plates. We convert the given value of the energy to Joules. Since $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{s}$, we multiply by $(10^3 \frac{W}{kW})(3600 \frac{s}{h})$

to obtain $10kW \cdot h = 3.6 \times 10^7 J$. Thus,

$$C = \frac{2U}{V^2} = \frac{2\left(3.6 \times 10^7\ \mathrm{J}\right)}{\left(1000\ \mathrm{V}\right)^2} = 72\ \mathrm{F}.$$

8th Ed【Problem 25-33】: 9th Ed【Problem 25-1】

Assume that a stationary electron is a point of charge. What is the energy density u of its electric field at radial distances (a) $r = 1mm$, (b) $r = 1\mu m$, (c) $r = 1nm$, and (d) $r = 1pm$? (e) What is u in the limit as $r \to 0$?

假設一個固定電荷是點電荷。當電場在徑向距離（a）$r = 1mm$，（b）$r = 1\mu m$，（c）$r = 1nm$ 和（d）$r = 1pm$，問能量密度 u？（e）當 $r \to 0$ 時問 u 的極限？

<解>：The energy per unit volume is

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}.$$

(a) At $r = 1.00\times10^{-3}\,\mathrm{m}$, with $e = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ and $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$, we have

$$u = 9.16\times10^{-18}\ \mathrm{J/m^3}.$$

(b) Similarly, at $r = 1.00\times10^{-6}\,\mathrm{m}$, $u = 9.16\times10^{-6}\ \mathrm{J/m^3}$.

(c) At $r = 1.00\times10^{-9}\,\mathrm{m}$, $u = 9.16\times10^{6}\ \mathrm{J/m^3}$.

(d) At $r = 1.00\times10^{-12}\,\mathrm{m}$, $u = 9.16\times10^{18}\ \mathrm{J/m^3}$.

(e) From the expression above $u \propto r^{-4}$. Thus, for $r \to 0$, the energy density $u \to \infty$.

8^{th} Ed【Problem 25-35】: 9^{th} Ed【Problem 25-35】

The parallel plates in a capacitor, with a plate area of $8.5cm^2$ and an air-filled separation of 3.00 mm, are charged by a 6.00 V battery. They are then disconnected from the battery and pulled apart (without discharge) to a separation of 8.00 mm. Neglecting fringing, find (a) the potential difference between the plates, (b) the initial stored energy, (c) the final stored energy, and (d) the work required to separate the plates.

平行板電容器中，其中板子面積 $8.5cm^2$，中間距離 3mm，充滿空氣。用 6 伏特電池充電。接著移開電池並且拉開板子距離到 8mm。(不釋放電荷狀況)。忽略摩擦，問（a）板子間的電位差？（b）一開始儲存的能量？（c）最後儲存的能量？（d）分開板子需做的功？

<解>：(a) Let q be the charge on the positive plate. Since the capacitance of a parallel-plate capacitor is given by $\frac{\varepsilon_0 A}{d_i}$, the charge is $q = CV = \frac{\varepsilon_0 A V_i}{d_i}$. After the plates are pulled apart, their separation is d_f and the potential difference is V_f. Then $q = \frac{\varepsilon_0 A V_f}{d_f}$ and

$$V_f = \frac{d_f}{\varepsilon_0 A} q = \frac{d_f}{\varepsilon_0 A} \frac{\varepsilon_0 A}{d_i} V_i = \frac{d_f}{d_i} V_i.$$

With $d_i = 3.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$, $V_i = 6.00$ V and $d_f = 8.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$,

we have $V_f = \frac{d_f}{d_i} V_i = \frac{8 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-3}}(6) = 16V$

(b) The initial energy stored in the capacitor is

$$U_i = \frac{1}{2}CV_i^2 = \frac{\varepsilon_0 A V_i^2}{2d_i} = \frac{(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(8.50\times10^{-4}\ \mathrm{m^2})(6.00\ \mathrm{V})^2}{2(3.00\times10^{-3}\ \mathrm{m})} = 4.51\times10^{-11}\ \mathrm{J}.$$

(c) The final energy stored is

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d_f}V_f^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d_f}\left(\frac{d_f}{d_i}V_i\right)^2 = \frac{d_f}{d_i}\left(\frac{\varepsilon_0 A V_i^2}{d_i}\right) = \frac{d_f}{d_i}U_i.$$

With $\frac{d_f}{d_i} = \frac{8}{3}$, we have $U_f = \frac{d_f}{d_i}U_i = \frac{8}{3}(4.51\times10^{-11} J) = 1.20\times10^{-10}$ J.

(d) The work done to pull the plates apart is the difference in the energy:

$$W = U_f - U_i = 7.52\times10^{-11}\ \mathrm{J}.$$

8th Ed【Problem 25-37】: 9th Ed【Problem 25-37】

In Fig. 25-45, $C_1 = 10\mu F$, $C_2 = 20\mu F$, and $C_3 = 25\mu F$. If no capacitor can withstand a potential difference of more than 100 V without failure, what are (a) the magnitude of the maximum potential difference that can exist between points A and B and (b) the maximum energy that can be stored in the three-capacitor arrangement?

圖 25-45 中，$C_1 = 10\mu F$，$C_2 = 20\mu F$ 和 $C_3 = 25\mu F$。如果沒有任何一個電容可以承受超過 100 伏特電位差，問（a）接在 AB 兩點的最大電位差爲何？（b）能存在 3 個電容的最大能量？

<解>：(a) 每一個電容會儲存相同電荷，因此最大的電壓會是在最小的電容上。

$$10\mu F \Rightarrow 100V$$

$$20\mu F \Rightarrow \frac{10\mu F \times 100V}{20\mu F} = 50V$$

$$25\mu F \Rightarrow \frac{10\mu F \times 100V}{25\mu F} = 40V$$

（圖 25-45）

Therefore, the voltage across the arrangement is 190 V.

(b) Using Eq. 25-21 or Eq. 25-22, we sum the energies on the capacitors and obtain

$$U_{total} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(10\times100^2 + 20\times50^2 + 25\times40^2)\times10^{-6} = 0.095J.$$

8th Ed【Problem 25-41】: 9th Ed【Problem 25-39】

Given a 7.4 pF air-filled capacitor, you are asked to convert it to a capacitor that can store up to $7.4\mu J$ with a maximum potential difference of 652 V. Which dielectric in Table 25-1 should you use to fill the gap in the capacitor if you do not allow for a margin of error?

給一個 7.4 pF 的電容器，中間充滿空氣，你被要求將其轉換爲一個電容，可以在 652 伏特電位差時，儲存達最大 $7.4\mu J$ 電能，如果不允許你有任何誤差，問在表 25-1 中的哪一種介質應被使用來填補縫隙？

<解>：The capacitance with the dielectric in place is given by $C = \kappa C_0$, where C_0 is the capacitance before the dielectric is inserted. The energy stored is given by

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}\kappa C_0 V^2 \text{, so}$$

$$\kappa = \frac{2U}{C_0 V^2} = \frac{2(7.4\times10^{-6}\,\text{J})}{(7.4\times10^{-12}\,\text{F})(652\text{V})^2} = 4.7.$$

According to Table 25-1, you should use Pyrex.

TABLE 25-1

Some Properties of Dielectrics[a]

Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength (kV/mm)
Air (1 atm)	1.00054	3
Polystyrene	2.6	24
Paper	3.5	16
Transformer oil	4.5	
Pyrex	4.7	14
Ruby mica	5.4	
Porcelain	6.5	
Silicon	12	
Germanium	16	
Ethanol	25	
Water (20°C)	80.4	
Water (25°C)	78.5	
Titania ceramic	130	
Strontium titanate	310	8

For a vacuum, κ = unity.

[a]Measured at room temperature, except for the water.

（Table 25-1）

8th Ed【Problem 25-43】：9th Ed【Problem 25-41】

A coaxial cable used in a transmission line has an inner radius of 0.10 mm and an outer radius of 0.60 mm. Calculate the capacitance per meter for the cable. Assume that the space between the conductors is filled with polystyrene.

同軸電纜線使用了一種傳輸線，其內部半徑爲 0.10mm，外徑爲 0.60mm。假設導體之間的空間充滿了聚苯乙烯，計算每米電纜的電容。

<解>：The capacitance of a cylindrical capacitor is given by

$$C = \kappa C_0 = \frac{2\pi\kappa\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)},$$

where C_0 is the capacitance without the dielectric, κ is the dielectric constant, L is the length, a is the inner radius, and b is the outer radius. The capacitance per unit length of the cable is

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\kappa\varepsilon_0}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi(2.6)(8.85\times10^{-12}\ \text{F/m})}{\ln[(0.60\ \text{mm})/(0.10\ \text{mm})]} = 8.1\times10^{-11}\,\text{F/m} = 81\ \text{pF/m}.$$

8th Ed【Problem 25-45】: 9th Ed【Problem 25-47】

A certain substance has a dielectric constant of 2.8 and a dielectric strength of 18 MV/m. If it is used as the dielectric material in a parallel-plate capacitor, what minimum area should the plates of the capacitor have to obtain a capacitance of $7\times10^{-2}\,\mu F$ and to ensure that the capacitor will be able to withstand a potential difference of 4.0 kV?

某物質具有介電常數 2.8 與介質強度 18 MV/m。如果它被用來作爲平行板電容器的電介質材料，要得到電容爲 $7\times10^{-2}\,\mu F$ ，確保將能夠承受的電位差爲 4 千伏，問最小面積應爲多少？

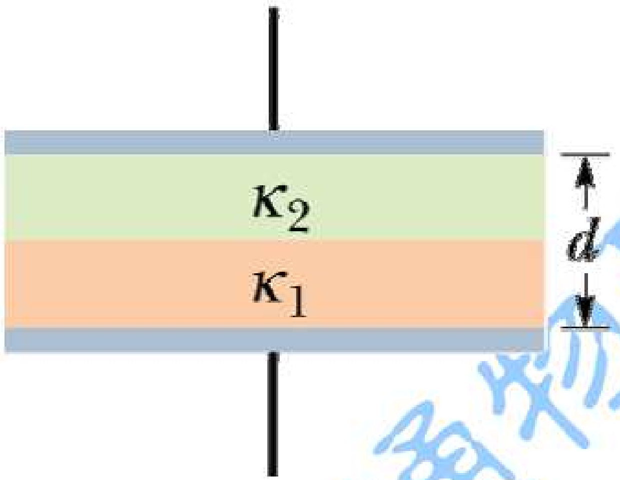
<解>：The capacitance is given by $C=\kappa C_0=\dfrac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$, where C_0 is the capacitance without the dielectric, κ is the dielectric constant, A is the plate area, and d is the plate separation. The electric field between the plates is given by $E=\dfrac{V}{d}$, where V is the potential difference between the plates. Thus, $d=\dfrac{V}{E}$ and $C=\dfrac{\kappa\varepsilon_0 AE}{V}$. Thus, $A=\dfrac{CV}{\kappa\varepsilon_0 E}$.

For the area to be a minimum, the electric field must be the greatest it can be without breakdown occurring. That is, $A=\dfrac{(7.0\times10^{-8}\,\mathrm{F})(4.0\times10^{3}\,\mathrm{V})}{2.8(8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m})(18\times10^{6}\ \mathrm{V/m})}=0.63\ \mathrm{m}^2$.

8th Ed【Problem 25-49】: 9th Ed【Problem 25-49】

Figure 25-49 shows a parallel-plate capacitor with a plate area $A = 7.89cm^2$ and plate separation $d = 4.62mm$. The top half of the gap is filled with material of dielectric constant $\kappa_1 = 11$; the bottom half is filled with material of dielectric constant $\kappa_2 = 12$. What is the capacitance?

圖 25-49 顯示了一個平行版電容器，板子面積 $A = 7.89cm^2$ ，距離 $d = 4.62mm$ 。縫隙的上半部充滿了一種材料，其介電常數 $\kappa_1 = 11$ ，下半部分是充滿了另一種材料，其介電常數 $\kappa_2 = 12$ 。問電容大小？



（圖 25-49）

<解>：We assume there is charge q on one plate and charge $-q$ on the other. The electric field in the lower half of the region between the plates is $E_1 = \dfrac{q}{\kappa_1 \varepsilon_0 A}$,

where A is the plate area. The electric field in the upper half is $E_2 = \dfrac{q}{\kappa_2 \varepsilon_0 A}$.

Let $d/2$ be the thickness of each dielectric. Since the field is uniform in each region, the potential difference between the plates is

$$V = \frac{E_1 d}{2} + \frac{E_2 d}{2} = \frac{qd}{2\varepsilon_0 A}\left[\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}\right] = \frac{qd}{2\varepsilon_0 A}\,\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2},$$

So $C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{2\varepsilon_0 A}{d}\,\dfrac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$.

This expression is exactly the same as that for C_{eq} of two capacitors in series, one with dielectric constant κ_1 and the other with dielectric constant κ_2. Each has plate area A and plate separation $\dfrac{d}{2}$. Also we note that if $\kappa_1 = \kappa_2$, the expression reduces to $C = \dfrac{\kappa_1 \varepsilon_0 A}{d}$, the correct result for a parallel-plate capacitor with plate area A, plate separation d, and dielectric constant κ_1.

With $A = 7.89\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, $d = 4.62\times10^{-3}\,\mathrm{m}$, $\kappa_1 = 11.0$ and $\kappa_2 = 12.0$, the capacitance is

$$C = \frac{2(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(7.89\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2)}{4.62\times10^{-3}\ \mathrm{m}}\,\frac{(11.0)(12.0)}{11.0+12.0} = 1.73\times10^{-11}\,\mathrm{F}.$$

8th Ed【Problem 25-51】: 9th Ed【Problem 25-51】

A parallel-plate capacitor has a capacitance of 100 pF, a plate area of $100 cm^2$, and a mica dielectric ($\kappa = 5.4$) completely filling the space between the plates. At 50 V potential difference, calculate (a) the electric field magnitude E in the mica, (b) the magnitude of the free charge on the plates, and (c) the magnitude of the induced surface charge on the mica.

一個平行板電容器的電容爲 100 pF，板子面積$100cm^2$，雲母介質（$\kappa = 5.4$）完全填充板與板之間的空間。在 50 伏特的電位差，計算（a）在雲母的電場大小 E？（b）在板子上自由電子的電荷大小，和（c）在雲母表面感應電荷的電荷大小？

<解>：(a) The electric field in the region between the plates is given by $E = \frac{V}{d}$, where V is the potential difference between the plates and d is the plate separation. The capacitance is given by $C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$, where A is the plate area and κ is the dielectric constant, so

$d = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{C}$ and

$$E = \frac{VC}{\kappa\varepsilon_0 A} = \frac{(50\ \text{V})(100\times10^{-12}\ \text{F})}{5.4(8.85\times10^{-12}\ \text{F/m})(100\times10^{-4}\ \text{m}^2)} = 1.0\times10^4\ \text{V/m}.$$

(b) The free charge on the plates is $q_f = CV = (100\times10^{-12} F)(50V) = 5\times10^{-9} C$.

(c) The electric field is produced by both the free and induced charge. Since the field of a large uniform layer of charge is $\dfrac{q}{2\varepsilon_0 A}$, the field between the plates is

$$E = \frac{q_f}{2\varepsilon_0 A} + \frac{q_f}{2\varepsilon_0 A} - \frac{q_i}{2\varepsilon_0 A} - \frac{q_i}{2\varepsilon_0 A},$$

where the first term is due to the positive free charge on one plate, the second is due to the negative free charge on the other plate, the third is due to the positive induced charge on one dielectric surface, and the fourth is due to the negative induced charge on the other dielectric surface. Note that the field due to the induced charge is opposite the field due to the free charge, so they tend to cancel. The induced charge is therefore

$$\begin{aligned} q_i &= q_f - \varepsilon_0 AE = 5.0\times10^{-9}\,\mathrm{C} - \left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}\right)\left(100\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2\right)\left(1.0\times10^{4}\ \mathrm{V/m}\right) \\ &= 4.1\times10^{-9}\,\mathrm{C} = 4.1\,\mathrm{nC}. \end{aligned}$$

8th Ed【Problem 25-53】: 9th Ed【Problem 25-55】

The space between two concentric conducting spherical shells of radii $b = 1.7cm$ and $a = 1.2cm$ is filled with a substance of dielectric constant $\kappa = 23.5$. A potential difference $V = 73V$ is applied across the inner and outer shells. Determine (a) the capacitance of the device, (b) the free charge q on the inner shell, and (c) the charge q' induced along the surface of the inner shell.

兩個同心圓半徑 $b = 1.7cm$ 和 $a = 1.2cm$，之間的空間填充充滿介電常數 $\kappa = 23.5$ 的物質。內外球殼的電位差爲 $V = 73V$。確定（a）此裝置的電容，（b）內球殼的自由電荷 q，和（c）內球殼表面的感應電荷 q'。

<解>：(a) According to Eq. 25-17 the capacitance of an air-filled spherical capacitor is given by

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right).$$

When the dielectric is inserted between the plates the capacitance is greater by a factor of the dielectric constant κ. Consequently, the new capacitance is

$$C = 4\pi\kappa\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right) = \frac{23.5}{8.99\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}}\cdot\frac{(0.0120\ \mathrm{m})(0.0170\ \mathrm{m})}{0.0170\ \mathrm{m}-0.0120\ \mathrm{m}} = 0.107\ \mathrm{nF}.$$

(b) The charge on the positive plate is $q = CV = (0.107\ \mathrm{nF})(73.0\ \mathrm{V}) = 7.79\ \mathrm{nC}$.

(c) Let the charge on the inner conductor be $-q$. Immediately adjacent to it is the induced charge q'. Since the electric field is less by a factor $1/\kappa$ than the field when no dielectric is present, then $-q + q' = -q/\kappa$. Thus,

$$q' = \frac{\kappa-1}{\kappa}q = 4\pi(\kappa-1)\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V = \left(\frac{23.5-1.00}{23.5}\right)(7.79\ \mathrm{nC}) = 7.45\ \mathrm{nC}.$$

8th Ed【Problem 25-55】: 9th Ed【Problem 25-53】

A parallel-plate capacitor has plates of area $0.12m^2$ and a separation of 1.2 cm. A battery charges the plates to a potential difference of 120 V and is then disconnected. A dielectric slab of thickness 4.0 mm and dielectric constant 4.8 is then placed symmetrically between the plates. (a) What is the capacitance before the slab is inserted? (b) What is the capacitance with the slab in place? What is the free charge q (c) before and (d) after the slab is inserted? What is the magnitude of the electric field (e) in the space between the plates and dielectric and (f) in the dielectric itself? (g) With the slab in place, what is the potential difference across the plates? (h) How much external work is involved in inserting the slab?

一個平行板電容器，面積$0.12m^2$，分離 1.2cm。電池充電使得電位差為 120 伏特，然後移開電池。電介質板厚度 4mm，介電常數為 4.8，對稱的放在板與板之間。（a）電介質板放入前的電容為何？（b）電介質板放入後，電容為何？電介質板放入（c）前（d）後，自由電荷 q 為何？（e）在平行板和電介質板之間的電場為何？（f）在電介質板本身電場為何？（g）隨著電介質板到位，整個平行板的電位差？（h）放入電介質板過程中，做了多少功？

<解>：(a) Initially, the capacitance is $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = \dfrac{\left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}\right)\left(0.12\ \mathrm{m^2}\right)}{1.2\times10^{-2}\ \mathrm{m}} = 89\ \mathrm{pF}.$

(b) Working through Sample Problem 25-7 algebraically, we find:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A\kappa}{\kappa(d-b)+b} = \frac{\left(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}\right)(0.12\,\mathrm{m^2})(4.8)}{(4.8)(1.2-0.40)(10^{-2}\,\mathrm{m})+(4.0\times10^{-3}\,\mathrm{m})} = 1.2\times10^{2}\ \mathrm{pF}.$$

(c) Before the insertion, $q = C_0V = (89\,pF)(120V) = 11nC$.

(d) Since the battery is disconnected, q will remain the same after the insertion of the slab, with $q = 11nC$.

(e) $E = \dfrac{q}{\varepsilon_0 A} = \dfrac{11\times10^{-9}C}{(8.85\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2)(0.12m^2)} = 10kV/m$

(f) $E' = \dfrac{E}{\kappa} = \dfrac{10kV/m}{4.8} = 2.1kV/m$

(g) The potential difference across the plates is

$$V = E(d-b)+E'b = (10kV/m)(0.012m-0.004m)+(2.1kV/m)(0.4\times10^{-3}m) = 88V$$

(h) The work done is

$$W_{\text{ext}} = \Delta U = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C_0}\right) = \frac{(11\times10^{-9}\ \mathrm{C})^2}{2}\left(\frac{1}{89\times10^{-12}\ \mathrm{F}}-\frac{1}{120\times10^{-12}\ \mathrm{F}}\right) = -1.7\times10^{-7}\ \mathrm{J}.$$